بسم الله الرحمن الرحیم

رشته : نرم افزار کامپیوتر

آمار و احتمالات

استاد مربوطه : سرکار خانم رستمی

دانشکده فنی حرفه ای کوثر

علم آمار : علم مرتب کردن ، تجزیه و تحلیل ، خلاصه کردن ، طبقه بندی کردن داده ها را گویند .

انواع آمارگیری : ۱.سرشماری : زمانی که تمام افراد جامعه را مورد بررسی قرار می دهیم .۲.نمونه گیری : انتخاب عده ی محدودی از افراد جامعه و بررسی خصوصیاتی که مد نظر آمارگیرنده می باشد و تعمیم آن به کل جامعه .

سوال : در چه مواردی از روش نمونه گیری استفاده می شود؟ ۱.زمانی که جامعه ی مورد مطالعه خیلی بزرگ باشد. ۲.منابع و نتایج آمارگیری در زمان کم مورد نیاز باشد . ۳.بودجه لازم برای آمارگیری محدود باشد. ۴.افراد متخصص و ماهر جهت سرشماری در اختیار نباشد .

دامنه تغییرات :

$$R = X_{max} - X_{min}$$

مثال : دامنه ی تغییرات آماری زیر را بدست آورید .

۲,۵,۷,۹,۱۵,۲۵,۳۳,۳۷

R = X_{max} − X_{min} = ۳۷−۲=۳۵

نکته : اگر به تمام داده های آماری n واحد اضافه شود دامنه تغییرات هیچ تغییری نمی کند.

مثال : اگر به داده های آماری زیر ۳ واحد اضافه کنیم . دامنه ی تغییرات جدید را به دست آورید .

۱۶,۴,۲۰,۵,۱۲,۱۰,۹

مرتب ۴,۵,۹,۱۰,۱۲,۱۶,۲۰ $\xrightarrow{+3}$ ۷,۸,۱۲,۱۳,۱۵,۱۹,۲۳

R=۲۰−۴=۱۶ R=۲۳−۷=۱۶

نکته : اگر به min داده ها n واحد اضافه کنیم و از max داده ها n واحد کم کنیم دامنه ی تغییرات به صورت زیر می باشد .

$$R = X_{max} - X_{min}$$

$$R = (x_{max} - n) - (x_{min} + n) = x_{max} - n - x_{min} - n = x_{max} - x_{min} - 2n$$

مثال : اگر از max داده های زیر ۲ واحد کم شود و به min دادها ۲ واحد اضافه شود دامنه ی تغییرات جدید را بدست آورید

.

۳,۵,۸,۱۲,۱۶,۲۰

R = (۲۰ - ۲) - (۳ + ۲) = ۱۸ - ۵ = ۱۳

فاصله طبقات : اگر بخواهیم داده های آماری را به طبقات موردنظر دسته بندی کنیم فاصله ی طبقات یا طول دسته از فرمول زیر بدست می آید .

$$C= \frac{R}{K}$$

مثال : اگر دامنه ی تغییرات چند داده ی آماری ۶۳ باشد و تعداد طبقات ۷ باشد . طول دسته ها را پیدا کنید .

$$C = \frac{63}{7} = ۹$$

R = ۶۳   K = ۷

مثال : داده های آماری زیر را در نظر بگیرید . می خواهیم این جامعه را به ۴ فاصله دسته بندی کنیم . تعداد طبقات چقدر است ؟

$$C = \frac{R}{K}$$

۱۰,۱۱,۲۱,۱۵,۲۶

$$۴ = \frac{24}{k}$$

۴ k=۲۴ → K=۶

C=۴ R=۲۶-۲=۲۴ k=؟

جدول فراوانی :

۱.فراخوانی مطلق(F_i) : تعداد اعضای هردسته یا تعداد دفعات تکرار هر داده را فراوانی مطلق گویند .و آن را با F_i نمایش می دهند . مجموع فراوانی های مطلق طبقات باید برابر تعداد کل داده ها باشد .

۰,۱,۱,۴,۴,۴,۴,۸,۱۰,۱۶

داده ها	F_i
۰ - ۴	۳
۴ - ۸	۴
۸ -۱۶	۳
مجموع	$=N=۱۰$ $\sum fi$

۲.فراوانی نسبی (F_{pi}) : عبارت است از فراوانی مطلق هر طبقه تقسیم بر کل جامعه . مجموع فراوانی های نسبی همیشه برابربا ۱ است.

$$F_{pi} = \frac{fi}{N}$$

داده ها	F_i	F_{pi}
۰−۵	۲	$\frac{2}{10}$=۰/۲ $\frac{fi}{N}$=
۵−۱۰	۱	$\frac{1}{10}$=۰/۱
۱۰−۱۵	۳	$\frac{3}{10}$ =۰/۳
۱۵−۲۰	۴	$\frac{4}{10}$=۰/۴
	=N=۱۰ $\sum fi$	۱

۳.درصد فراوانی نسبی (F_{pi} ×۱۰۰) : از حاصل ضرب فراوانی نسبی هر طبقه در عدد ۱۰۰ بدست می آید . مجموع درصد فراوانی نسبی همیشه برابر ۱۰۰ می باشد .

داده ها	F_i	F_{pi}	F_{pi}×۱۰۰
۰−۵	۲	۰/۲	۰/۲×۱۰۰=۲۰
۵−۱۰	۱	۰/۱	۰/۱×۱۰۰=۱۰
۱۰−۱۵	۳	۰/۳	۰/۳×۱۰۰=۳۰
۱۵−۲۰	۴	۰/۴	۰/۴×۱۰۰=۴۰
	=N=۱۰ $\sum fi$	۱	۱۰۰

۴.فراوانی تجمعی (F_{ci}) : برابر است با مجموع فراوانی مطلق دو طبقه به علاوه فراوانی های مطلق قبل از آن که با F_{ci} نمایش می دهند .

نکته : فراوانی تجمعی طبقه اول همیشه برابر است با فراوانی مطلق اولین طبقه و فراوانی تجمعی طبقه آخر برابر است با کل جامعه .

داده ها	F_i	F_{ci}
۰−۴	۳	۳
۴−۸	۴	۴+۳=۷
۸−۱۶	۳	۷+۳=۱۰=N
	=N=۱۰	

	$\sum fi$	

۵.فراوانی تجمعی نسبی (F_{cPi}) : آخرین فراوانی تجمعی نسبی همیشه برابر یک می باشد .

داده ها	F_i	F_{Ci}	F_{Cpi}
۰−۴	۳	۳	$\frac{3}{10}$
۴−۸	۴	۷	$\frac{7}{10}$
۸−۱۶	۳	۱۰	$\frac{10}{10}$=۱

۶.درصد فراوانی تجمعی نسبی (F_{cPi} ×۱۰۰) : از حاصل ضرب فراوانی تجمعی نسبی در عدد ۱۰۰ بدست می آید که آخرین طبقه آن همیشه ۱۰۰ می باشد .

داده ها	F_i	F_{Ci}	F_{Cpi}	F_{cPi} ×۱۰۰
۰−۴	۳	۳	۰/۳	۰/۳×۱۰۰
۴−۸	۴	۷	۰/۷	۰/۷×۱۰۰
۸−۱۶	۳	۱۰	۱	۱×۱۰۰

مثال : داده های زیر را در نظر بگیرید. می خواهیم جدول فراوانی رسم شود که فاصله ی طبقات آن ۳ باشد . جدول مورد نظر را رسم کنید .

۱,۱,۲,۲,۳,۴,۴,۵,۵,۵,۵,۶,۸,۸,۸,۹,۹,۱۰,۱۲,۱۳ → N=۲۰

داده ها	F_i	F_{pi}	F_{pi}×۱۰۰	F_{Ci}	F_{Cpi}	F_{cPi}×۱۰۰
۱−۴	۵	۰/۲۵ $\frac{5}{20}$ =	۰/۲۵×۱۰۰=۲۵	۵	۰/۲۵ $\frac{5}{20}$=	۰/۲۵×۱۰۰
۴−۷	۷	۰/۳۵ $\frac{7}{20}$ =	۰/۳۵×۱۰۰=۳۵	۷+۵=۱۲	۰/۶ $\frac{12}{20}$ =	۰/۶×۱۰۰
۷−۱۰	۵	۰/۲۵ $\frac{5}{20}$ =	۰/۲۵×۱۰۰=۲۵	۵+۱۲=۱۷	۰/۸۵ $\frac{17}{20}$=	۰/۸۵×۱۰۰

-۱۳ ۱۰	۳	$\frac{3}{20} =$ ۰/۱۵	۰/۱۵×۱۰۰=۱۵	۱۷+۳=۲۰ = N	$\frac{20}{20} =$ ۱	۱×۱۰۰=۱۰۰
	$\sum fi$=۲۰=N	۱	۱۰۰			

مثال : پزشکی ۱۲ بیمار با گروه های خونی زیر دارد . جدول فراوانی این گروه را رسم نمایید .

A,A,A,AB,AB,O,O,O,B,B,B,B

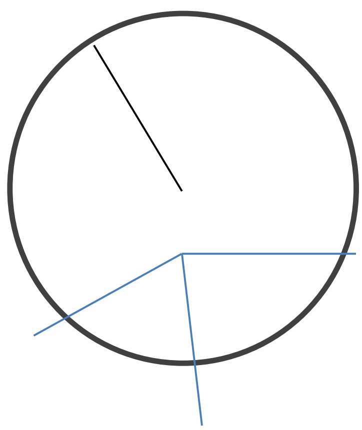
داده ها	F_i	F_{pi}	F_{pi}×۱۰۰	F_{Ci}	F_{Cpi}	F_{cPi}×۱۰۰
A	۳	$\frac{3}{12} =$ ۰/۲۵	۰/۲۵×۱۰۰	۳	$\frac{3}{12} =$ ۰/۲۵	۰/۲۵×۱۰۰
AB	۲	$\frac{2}{12} =$ ۰/۱۶	۰/۱۶×۱۰۰	۲+۳=۵	$\frac{5}{12} =$ ۰/۴۱	۰/۴۱ × ۱۰۰
B	۴	$\frac{4}{12} =$ ۰/۳۳	۰/۳۳×۱۰۰	۹	$\frac{9}{12} =$ ۰/۷۵	۰/۷۵×۱۰۰
O	۳	$\frac{13}{12} =$ ۰/۲۵	۰/۲۵×۱۰۰	۱۲N	$\frac{12}{12} =$ ۱	۱×۱۰۰=۱۰۰
	$\sum fi$=۱۲=N	۱	۱۰۰			

نمودارها :

۱.نمودار دایره ای : در این نمودار سطحی از دایره متناسب است با فرمول زیر : $\hat{\propto} = \frac{F_i}{N}$ **× ۳۶۰**

مثال : جدول زیر گروه خونی ۱۲۰ نفر از بیماران یکی از بیمارستان های گنبد می باشد . نمودار دایره ای و جدول آن را رسم کنید .

داده ها	F_i	
A	۴۵	$\propto_1 = \frac{45}{120}$×۳۶۰=۱۳۵
AB	۲۰	$\propto_2 = \frac{20}{120}$×۳۶۰=۶۰
B	۳۵	$\propto_3 = \frac{35}{120}$×۳۶۰=۱۰۵



O	۲۰	$\propto_4 = \frac{20}{120} \times ۳۶۰ = ۶۰$
	$\sum fi = ۱۲۰ = N$	

داده ها	F_i	F_{pi}	$F_{pi} \times ۱۰۰$	F_{Ci}	F_{Cpi}	$F_{cPi} \times ۱۰۰$
A	۴۵	$\frac{45}{120} = ۰/۳۷$	۰/۳۷×۱۰۰=۳۷	۴۵	$\frac{45}{120} = ۰/۳۷$	۰,۳۷×۱۰۰=۳۷
AB	۲۰	$\frac{20}{120} = ۰/۱۶$	۰/۱۶×۱۰۰=۱۶	۶۵	$\frac{65}{120} = ۰/۵۴$	۰,۵۴×۱۰۰=۵۴
B	۳۵	$\frac{35}{120} = ۰/۲۹$	۰/۲۹×۱۰۰=۲۹	۱۰۰	$\frac{100}{120} = ۰/۸۳$	۰,۸۳×۱۰۰=۸۳
O	۲۰	$\frac{20}{120} = ۰/۱۶$	۰/۱۶×۱۰۰=۱۶	۱۲۰	$\frac{120}{120} = ۱$	۱×۱۰۰=۱۰۰
	$\sum fi$=۱۲۰=N	۱	۱۲۰			

شاخص های مرکزی

۱.میانگین : الف) میانگین حسابی : مهمترین شاخص مرکزی میانگین حسابی می باشد که مقدار متوسط داده ها را نشان می دهد و ما به اختصار آن را میانگین می نامیم . فرمول آن به صورت زیر می باشد :

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N}$$

نکته : در صورتی که در داده های آماری فراوانی مطلق وجود نداشته باشد از فرمول :

(F_i)=۱

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n}$$

مثال : میانگین داده های زیر را بدست آورید.

N=۱۵

۲,۲,۳,۳,۳,۴,۵,۵,۵,۵,۹,۹,۹,۹,۹

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N} = \frac{(2\times2)+3(3)+4+4(5)+5(9)}{15} = \frac{4+9+4+20+45}{15} = \frac{82}{15} = ۵/۴۶$$

۲,۳,۷,۲۰,۲۵,۳۰,۱۰۰

$N = ۷$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{2+3+7+20+25+30+100}{7} = \frac{187}{7} = ۲۶/۷۱$$

مثال : جدول زیر توزیع فراوانی نمرات درس آمار ۵۰ دانشجو به شرح زیر می باشد .
میانگین این جدول را حساب کنید .

داده ها	f_i	x_i	$F_i X_i$
۳−۵	۹	$\frac{3+5}{2}$ = ۴	۴×۹ = ۳۶
۶−۸	۱۰	$\frac{6+8}{2}$ = ۷	۷۰
۹−۱۱	۹	$\frac{9+11}{2}$ = ۱۰	۹۰
۱۲−۱۴	۱۰	$\frac{12+14}{2}$ = ۱۳	۱۳۰
۱۵−۱۷	۶	$\frac{15+17}{2}$ = ۱۶	۹۶
۱۸−۲۰	۶	$\frac{18+20}{2}$ = ۱۹	۱۱۴

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N} = \frac{536}{50} = ۱۰/۷۲$$

ب) میانگین هندسی : اگر داده های x_2 , x_2 , ... , x_n همگی مثبت باشند میانگین هندسی از فرمول زیر بدست می آید .

$$G = \sqrt[N]{x_1 - x_2 - \cdots\cdots\ x_n}$$

و اگر داده ها طبقه بندی یا گروه بندی شده باشند از فرمول :

$$G = \sqrt[N]{\frac{f_1}{x_i} - \frac{f_2}{x_2} \cdots\cdots - \frac{f_n}{x_n}}$$

که در آن x_i ها نماینده ی طبقه iام و f_i ها فراوانی طبقه iام می باشد .

مثال: میانگین هندسی اعداد زیر را بدست آورید .

$= \sqrt[4]{2\times 3\times 2^3 \times 3^3} = \sqrt[4]{2^4 \times 3^4} =$ ۲ × ۳ =۶

۲ , ۳ , ۸ , ۲۷ $G= \sqrt[4]{2\times 3\times 8\times 27}$

مثال: میانگین هندسی جدول فراوانی زیر را محاسبه کنید .

داده ها	f_i	x_i
۱۰−۱۲	۳	$\frac{10+12}{2}$ = ۱۱
۱۳−۱۵	۵	$\frac{13+15}{2}$ = ۱۴
۱۶−۱۸	۲	$\frac{16+18}{2}$ = ۱۷
	$= N$ ۱۰	

$G = \sqrt[10]{(11)^3\,(14)^5(17)^2}$

نکته : برای محاسبه ی نرخ رشد (رشد متوسط) از میانگین هندسی استفاده می شود .

مثال : میزان تولید کارخانه ای در چهار سال متوالی ۲,۴,۶,۲۷ برابر است نسبت به سال قبل می باشد . مطلوب است میزان افزایش متوسط تولید (نرخ رشد)

$G= \sqrt[4]{2\times 4\times 6\times 27} = \sqrt[4]{1296}$

مثال : اتومبیلی فاصله ی بین دو شهر B و A که ۶۰ کیلومتر است . با سرعت متوسطه ۶۰ کیلومتر در ساعت رفته است و همین مسیر را با سرعت متوسط ۳۰ کیلومتر در ساعت برگشته است . سرعت متوسط در رفت و برگشت را محاسبه کنید .

$\overline{X} = \frac{60+30}{2} = \frac{90}{2} =$ ۴۵

میانگین همساز : اگر هیچ یک از داده های x_1 , x_2 , ... , x_n صفر نباشد . میانگین همساز هارمونیک از فرمول زیر بدست می آید .

$\frac{H}{f_i} = \frac{n}{\frac{1}{x_i}}$

$\overline{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N}$ $\qquad$ $\mathrm{H} = \frac{n}{\frac{\sum F_i X_i}{x_i}}$

۲.**میانه :** M_d اندازه ای از صفت است که در وسط قرار گرفته است . اگر داده ها زوج باشد میانه از فرمول $M_d = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ و اگر داده ها فرد باشد میانه از فرمول $M_d = \frac{x_{n+1}}{2}$

مثال : میانه ی داده های زیر را بیابید.

$\frac{x_{\frac{5+1}{2}}}{} = x_3 = ۵$

۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۰ $M_d = \frac{x_{n+1}}{2} =$

$= \frac{x_{\frac{6}{2}} + x_{\frac{6}{2}+1}}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{9+12}{2} =$ ۱۰/۵

۱ , ۵ , ۹ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۴ M_d

مثال : میانگین ۴ عدد برابر است با ۸۰ اگر عدد ۳۰ به آن اضافه شود میانگین ۵ عدد حاصل را بدست آورید .

$= \frac{350}{5} =$ ۷۰

۸۰= $\frac{\sum x_i}{4} \to \sum x_i =$ ۳۲۰ $\bar{x} = \frac{320+30}{5}$

$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n}$

x_i	f_i	f_c
۱	۴	۴
۲	۸	۱۲
۳	۶	۱۸
۴	۴	۲۲
۵	۳	۲۵

میانه برای داده های طبقه بندی شده :

ابتدا فراوانی تجمعی را تشکیل می دهیم . سپس با توجه به فرد بودن داده ها از فرمول k= $\frac{n+1}{2}$ و برای داده های زوج k= $\frac{n}{2}$ استفاده می کنیم . سپس با استفاده از فرمول زیر مقدار میانه را بدست می آوریم .

$k = f(x_i)$ $f(x_i - 1) \leq k \leq f(x_i)$

مثال : در جدول زیر میانه را بدست آورید .

$k = \frac{n+1}{2} = \frac{25+1}{2} =$ ۱۳

M_d =۳

۱۲ ≤۱۳ ≤۱۸

مد یا نما (M_O) : اندازه ای از متغیر که بیشترین تکرار را داشته باشد که اگر در جامعه ای فراوانی داده ها یک باشد ، داده ها مد ندارد و اگر در جامعه ای بیشتر از یک تکرار داشته باشیم آن را چندنمایی می گویند .

مثال : در داده های زیر میانگین ، میانه و مد را بدست آورید .

N = ۷

۲۵,۵۵,۳۰,۶۰,۵۰,۶۰,۷۰ → ۲۵,۳۰,۵۰,۵۵,۶۰,۶۰,۷۰

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N} = \frac{25+30+50+55+2(60)+70}{7} = \frac{350}{7} = ۵۰$$

$$M_d = \frac{x_{n+1}}{2} = \frac{x_8}{2} = x_4 = ۵۵$$

مد برای داده های طبقه بندی شده : برای داده های طبقه بندی شده ابتدا طبقه ای که فراوانی آن ماکزیمم را مشخص می کنیم و آن را طبقه مد دار گوییم . سپس مد را از فرمول زیر بدست می آوریم .

$$M_o = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right) \cdot C$$

L_i : کران پایین طبقه مدار

L_i = ۵۶

C : فاصله طبقات

c = ۴

d_1 : تفاضل بزرگترین فراوانی با فراوانی قبل از آن

۴۲ - ۳۰ = ۱۲

d_2 : تفاضل بزرگترین فراوانی با فراوانی بعد از آن

۴۲ – ۲۵ = ۱۷

x_i	
۵۲–۵۶	۳۰
۵۶–۶۰	۴۲
۶۰–۶۴	۲۵
۶۴–۶۸	۱۷

$$M_o = ۵۶ + \left(\frac{12}{12+17}\right) \times ۴ = ۵۶ + (۰/۴۱) \times ۴ = ۵۶ + ۱/۶۴ = ۵۷/۶۴$$

واریانس و انحراف معیار :

$$\delta^2 = v^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

انحراف معیار : جذر واریانس را انحراف معیار گویند .

$$\delta = \sqrt{v^2} = v$$

مثال : واریانس داده های زیر را بدست آورید

۲ , ۳ , ۵ , ۷ $\quad \bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N} = \frac{2+3+5+7}{4} = \frac{17}{4} =$ ۴/۵

$$\rightarrow \quad \delta^2 = \frac{6/25+ 2/25+ 0/25+ 6/25}{2} = ۷/۵$$

$$\delta^2 = \frac{(2-4/5)^2+(3-4/5)^2+(5- 4/5)^2+(7-4/5)^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{7/5}$$

مثال : در جدول زیر واریانس و انحراف معیار را بدست آورید .

داده ها	f_i	x_i	$F_i X_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \ (x_i - \bar{x})^2$
۰−۴	۴	$\frac{0+4}{2} =$ ۲	۸	$(2-9)^2=$ ۴۹	۱۹۶
۴−۸	۶	$\frac{4+8}{2} =$ ۶	۳۶	$(6-9)^2 =$ ۹	۵۴
۸−۱۲	۴	$\frac{8+12}{2} =$ ۱۰	۴۰	$(10-9)^2 =$ ۱	۴
۱۲−۱۶	۲	$\frac{12+16}{2} =$ ۱۴	۲۸	$(14-9)^2 =$ ۲۵	۵۰
۱۶−۲۰	۴	$\frac{16+20}{2} =$ ۱۸	۷۲	$(18-9)^2 =$ ۸۱	۳۲۴
	۲۰		۱۸۴		۶۲۸

$$\bar{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N} = \frac{184}{20} = ۹/۲ \simeq ۹$$

$\delta = \sqrt{31/4}$ $\qquad$ **واریانس** $\delta^2 = \frac{628}{20} =$ **۳۱/۴**

چارک , دهک ، صدک داده های طبقه بندی نشده : برای محاسبه چارک از روش زیر عمل می کنیم .

۱.دادها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم .

۲.با استفاده از فرمول $\frac{1}{2} + \frac{an}{4} = Q$ برای چارک و $\frac{1}{2} + \frac{an}{10}$ $D =$ برای دهک و $\frac{1}{2} + \frac{an}{100} = P$ برای صدک

جای چارک ، دهک ، صدک را پیدا می کنیم سپس با استفاده از فرمول های زیر مقادیر چارک ، دهک و صدک را بدست می آوریم .

(عدد کوچکتر – عدد بزرگتر) عدد اعشاری جای چارک + عدد کوچکتر = Q $\qquad$ چارک $Q = \frac{an}{4} + \frac{1}{2}$

(عدد کوچکتر – عدد بزرگتر) عدد اعشاری جای دهک + عدد کوچکتر = D $\qquad$ دهک $D = \frac{an}{10} + \frac{1}{2}$

(عدد کوچکتر – عدد بزرگتر) عدد اعشاری جای صدک + عدد کوچکتر = P $\qquad$ صدک $P = \frac{an}{100} + \frac{1}{2}$

مثال : برای داده های زیر چارک اول ، دهک دوم و صدک پانزدهم را پیدا کنید .

N = ۷ $\qquad \rightarrow$

۵,۹,۱۰,۱۲,۱۷,۲۰,۲۴ $\qquad \rightarrow$

Q = ۹ + ۱۷,۱۲,۱۰,۹,۵,۲۰,۲۴ $\qquad Q_1 = \frac{1\times7}{4} + \frac{1\times2}{2\times2} = \frac{9}{4} =$ ۲/۲۵

۰/۲۵(۹ – ۱۰) = ۹/۲۵

= ۵ + ۰/۹ (۹ – ۵) = ۵ + ۳/۶ = ۸/۶

D_2 $\qquad D_2 = \frac{2\times7}{10} + \frac{1\times5}{2\times5} = \frac{14}{10} + \frac{5}{10} = \frac{19}{10} =$ ۱/۹

P_{15} = ۵ + ۰/۵۵ (۹ – ۵) = ۵ + ۲/۲ = ۷/۲

$P_{15} = \frac{15\times17}{100} + \frac{1\times50}{2\times50} = \frac{155}{100} =$ ۱/۵۵

چارک ، دهک و صدک داده های طبقه بندی شده : به روش زیر عمل می کنیم :

۱.فراوانی تجمعی را بدست می آوریم . ۲.با استفاده از فرمول های $\frac{an}{4}$ ، $\frac{an}{10}$ ، $\frac{an}{100}$ سطری را که چارک ، دهک و صدک در آن قرار گرفته است مشخص می کنیم . ۳.سپس با استفاده از فرمول زیر مقدار خواسته شده را محاسبه می کنیم .

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{L_i} + \left(\frac{\frac{a}{4} - f_{ci}}{f_i}\right) \cdot \boldsymbol{C}$$

C = فاصله طبقات

$\mathbf{L_i}$ = کران یا حد پایین طبقه چارک دار .

F_{ci} = فراوانی تجمعی ما قبل طبقه چارک دار

F_i = فراوانی مطلق طبقه چارک دار

مثال : جدول زیر گروه سنی ۱۰۰ نفر را شامل می شود مطلوب است :

الف) چارک اول ، ب) دهک ششم ، ج) صدک سی و ششم

داده ها	F_i	F_{ci}
۰-۱۰	۱۲	۱۲
۱۰-۲۰	۱۸	۳۰
۲۰-۳۰	۲۷	۵۷
۳۰-۴۰	۲۰	۷۷
۴۰-۵۰	۱۷	۹۴
۵۰-۶۰	۶	۱۰۰

F_{ci} = ۱۲ F_i = ۱۸ L_i = ۱۰ C = ۱۰

$\frac{an}{4} \rightarrow Q_1 = \frac{1\times100}{4}$ = ۲۵

Q_1 = ۱۰ + ($\frac{25-12}{18}$) × ۱۰ = ۱۰ + ۷/۲۲ = ۱۷/۲۲

F_{ci} = ۵۷ F_i = ۲۰ L_i = ۳۰ C = ۱۰

$\frac{an}{10} \rightarrow D_6$ = ($\frac{6\times100}{10}$) = ۶۰

D_6 = ۳۰ + ($\frac{60-57}{20}$) × ۱۰ = ۳۰ + ۱/۵ = ۳۱/۵

F_{ci} = ۳۰ F_i = ۲۷ L_i = ۲۰ C = ۱۰

$\frac{an}{100} \rightarrow P_{36}$ = ($\frac{36\times100}{100}$) = ۳۶

P_{36} = ۲۰ + ($\frac{36-30}{27}$) × ۱۰ = ۲۰ + ۲/۲۲ = ۲۲/۲۲

فضا نمونه (n) : مجموعه ی تمام حالت هایی که یک آزمایش تصادفی می تواند داشته باشد را فضای نمونه گویند و آن را با n نمایش می دهند .

۲ = n سکه ۱ = { T, H}

۶ = n ← { ۱,۲,۳,۴,۵,۶ } = تاس

احتمال : شانس وقوع یک پیشامد را احتمال گویند و آن را به صورت زیر نمایش می دهند .

$$P_A = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال : فضای نمونه برای پرتاب دو سکه را بنویسید .

نکته : فضای نمونه برای پرتاب تاس برابر است با 6^n و برای پرتاب سکه 2^n می باشد .

$,(T\ ,\ H)\ ,(H\ ,\ H)\ ,\ (H\ ,\ T)\ \}$ $n_{(A)}$ = ۴

سکه ۱ = { T, H}   **سکه 2^A = {(T , T)**

(۱,۴) .... ,(۶,۶)

} $n_{(s)}$ =۶   **تاس۲ = (۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),**

تاس ۱ = {۱,۲,۳,۴,۵,۶}

۳۶

تاس $2^n = 6^2$ =

سکه 2^m

n

تاس 6^m

$\rightarrow 2^3 = ۸$

$= ۲ \rightarrow 2^2 = ۴$ ۳ بار پرتاب

n_A

تاسn^m = 6^m →تعداد پرتاب

تاس $2n_s = 6^2 = ۳۶$ سکهn^m = 2^m →تعداد پرتاب

پیشامد : هر زیر مجموعه از فضای نمونه را پیشامد گویند و با حروف بزرگ نمایش می دهند .

مثال : دو سکه را پرتاب می کنیم : الف)فضای نمونه ، ب)پیشامدی از آن که هر دو خط باشند را بنویسید .

$S = \{ (T,T),(T,H),(H,T),(H,H) \}$ $n_S = ۴$

$= \frac{1}{4}$

$A = \{ (H,H) \}$ $n_{(A)} = ۱$ $P_A = \frac{n(A)}{n(S)}$

مثال : تاسی را دو بار پرتاب می کنیم احتمال آن که مجموع اعداد بدست آمده ۷ باشد را محاسبه کنید .

$n_{(s)} = 6^2 = ۳۶$ $P_A = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$A = \{(۱,۶),(۳,۴),(۲,۵),(۶,۱),(۴,۳),(۵,۲)\}$ $n_{(A)} = ۶$

مثال : سکه ای را ۳ بار پرتاب می کنیم احتمال اینکه هر بار خط بیاید چقدر است ؟ $n_{(s)} = 2^3 = ۸$

$S = \{$ (ش,ش,ش) , (ش,خ,خ) , (ش,ش,خ) , (خ,ش,خ) , (خ,خ,خ) , (خ,خ,ش) , (ش,خ,ش) , (خ,ش,ش) $\}$

$n_{(A)} = ۳$ $P_A = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

$A = \{$ (ش,ش,خ) , (خ,ش,ش) , (ش,خ,ش) $\}$

قضایای احتمال کلاسیک :

۱.اجتماع در پیشامد : اگر A و B دو پیشامد باشند $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که یکی از پیشامدهای A و B و یا هر دو رخ دهند . فرمول زیر نمایش احتمال پیشامد $A \cup B$ است .

$$P_{(A\cup B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{A\cap B}$$

نکته : اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند یعنی نتوانند به طور همزمان رخ دهند در این صورت $P_{A\cap B} = ۰$ می شود .

مثال : از ظرفی محتوای ۱۰ توپ با شماره های ۳ تا ۱۲ توپی را به تصادف خارج می کنیم . احتمال آن که شماره توپ برداشته شده بر ۳ یا ۴ بخش پذیر باشد چقدر است ؟

نکته (یادآوری) : $P_{A\cap B} = \frac{n_{(A\cap B)}}{n_s}$

$n_{(s)} = ۱۰$ $S= \{۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\}$

$P_A = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{10}$

$n_{(A)} = ۴$ $A = \{۳,۶,۹,۱۲\}$ بر ۳ بخش پذیر

$P_B = \frac{3}{10}$ $n_{(B)} = ۳$ $B = \{۴,۸,۱۲\}$ بر ۴ بخش پذیر

$A \cap B = \{۱۲\}$ $n_{A\cap B} = ۱$ $P_{A\cap B} = \frac{۱}{۱۰}$

$P_{(A\cup B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{A\cap B} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$

پیشامد متمم : تنها وقتی اتفاق می افتد که پیشامد A اتفاق نیافتد . $\acute{P}_A = ۱ - P_{(A)}$

مثال : روی ۱۰ کارت ارقام ۰ تا ۹ نوشته شده است مطلوب است کارتی را به تصادف خارج می کنیم :

الف) احتمال اینکه عدد روی آن مضرب ۵ نباشد کدام است ؟

ب) احتمال آن که مضرب ۳ نباشد کدام است ؟

$n_{(s)} = ۱۰$ $S= \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

مضرب ۵ نباشد $\acute{P}_A = ۱ - \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$

$P_A = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{10}$ $n_{(A)} = ۲$ $A = \{۰,۵\}$

مضرب ۳ نباشد $P_B = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{10}$ $\acute{P}_B = ۱ - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

$n_{(B)} = ۳$ $B = \{۳,۶,۹\}$

مثال : دو تاس را پرتاب می کنیم احتمال آن که مجموع اعداد ظاهر شده بیشتر از ۳ باشد را بدست آورید .

$n_{(s)} = 6^2 = ۳۶$ $S = \{(۱,۱),(۱,۲),............,(۶,۶)\}$

$= \frac{3}{36} \quad = \quad \frac{1}{12} \qquad\qquad \acute{P}_A = ۱ - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

A = {(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱)} n_A

احتمال شرطی : احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط آن که پیشامد B رخ داده باشد . $P_{(A|B)} = \frac{P_{A\cap B}}{P_B}$

مثال : تاس سالمی را پرتاب می کنیم . اگر عدد ظاهر شده زوج باشد احتمال آن که آن عدد ۴ باشد کدام است ؟

S= {۱,۲,۳,۴,۵,۶ } $n_{(s)}$ = ۶

n_A = ۱ $A \cap B$ = {۴} → $n_{A\cap B}$ = ۱

B = {۲,۴,۶} n_B = ۳ A = {۴}

$P_{(A|B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{3} = \frac{1}{3}$

$P_{A\cap B} = \frac{n_{A\cap B}}{n_s} = \frac{1}{6} \qquad P_B = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6}$

جایگشت (تبدیل) : منظور از جایگشت یا تبدیل n شی متمایز ایجاد گروه هایی است با تمام اعضا به طوری که تفاوت این گروه ها در ترتیب قرار گرفتن آنها کنار هم باشد و به صورت ! $P_n = n$ نمایش داده می شود .

مثال : ۴ نفر برای گرفتن گذرنامه مراجعه می کنند به چند طریق می توان صفی جهت گذرنامه تشکیل دهند ؟

P_4 = ۴ ! = ۴ ×۳ × ۲ ×۱ = ۲۴

نکته : در حالت کلی بخواهیم r شی را در جایگشت قرار دهیم از فرمول زیر استفاده می شود .

P = (n– r +۱) ! r !

مثال : به چند طریق می توان ۷ نفر که ۳ نفر آنها فامیل هستند کنار هم طوری بشینند که ۳ نفر فامیل کنارهم باشند؟

P = (۷ – ۳ + ۱) ! ۳ ! = (۵ × ۴ × ۳ × ۲ ×۱) (۳× ۲ × ۱) = ۷۲۰

جایگشت دایره ای (حلقوی) : به تبدیل هایی که به وسیله ی آن یک دسته از اشیا را روی محیط دایره مرتب می کنیم ،گویند و به صورت زیر نمایش داده می شود .

الف) جایگشت دایره ای n شی متمایز به صورت ! (۱−n) = P_n می باشد .

مثال : ۴ پلیس به چند طریق می توانند دور یک میدان انجام وظیفه کنند ؟

$$p_n = (۴-۱)\,! = ۳\,! = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$$

ب) برای چیدن m شی متمایز به طوری که $n = m$ از فرمول n ! $P = ۲ \times m\,!$

مثال : ۳ کتاب ریاضی و ۳ کتاب کامپیوتر را به چند طریق می توان یک در میان چید ؟

$$p = ۲ \times ۳\,! \times ۳\,! = ۲\,(۳ \times ۲ \times ۱)\,(۳ \times ۲ \times ۱) = ۷۲$$

ج) اگر m متمایز و $n-۱$ شی متمایز دیگر را بخواهیم به صورت دایره ای کنار هم قرار دهیم از فرمول $p = m\,!\,n\,!$ استفاده می کنیم .

مثال : به چند طریق می توان ۴ کتاب ریاضی و ۳ کتاب فیزیک را به صورت دایره ای یک در میان قرار دهیم ؟

$$p = m!\ \ n! = ۴!\ ۳! = (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱)\,(۳ \times ۲ \times ۱) = ۱۴۴$$

$m = ۴ \qquad n = ۳$

د) اگر n شی متمایز از یک دسته و n شی متمایز دیگر از دسته ای دیگر را بخواهیم یک در میان دور یک میز قرار دهیم تعداد حالت ممکن برابر است با $P = n!\,(n-۱)\,!$

مثال : به چند طریق می توان ۴ صندلی چوبی و ۴ صندلی فلزی را دور یک میز دایره ای به صورت یک در میان چید ؟

$$P = n!\,(n-۱)\,! = ۴!\,(۴-۱) = ۱۴۴$$

ترتیب : منظور از ترتیب r تایی از n شی تعداد حالات ممکن انتخاب r شی از n شی می باشد . به صورت زیر است .

$$P_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : به چند طریق می توان از بین ۶ نفر ، ۴ نفر را انتخاب نمود که نفر اول مدیر ، نفر دوم معاون ، نفر سوم حسابدار و نفر چهارم مسئول انفورماتیک با شد ؟

$$P_{(6,4)} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = ۳۶۰$$

مثال : به چند طریق می توان از بین گروه ۱۲ نفری تیم ورزشی ۳ نفر را جهت مقام های اول ، دوم و سوم انتخاب کرد ؟

$$P_{(12,3)} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{9!} = ۱۳۲۰$$

مثال: با حروف کلمه ی کامپیوتر چند کلمه ی ۴ حرفی می توان نوشت ؟ (بدون تکرار حروف)

$$P_{(8,4)} = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4!} = ۱۶۸۰$$

ترکیب : اگر در انتخاب r شی از n شی ترتیب آنها مهم نباشد ترکیب گویند و با $C_{n,r}$ یا $C\binom{n}{r}$ نمایش می دهند .

$$C_{(n,r)} = C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال : از یک گروه ۸ نفر چند گروه ۳ نفر می توان تشکیل داد ؟

$$C\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{(3\times2\times1)5!} = ۵۶$$

مثال : ظرفی دارای ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است از این ظرف ۲ مهره به تصادف خارج می کینم . این آزمایش چند عضو دارد ؟

$$C\binom{13}{2} = \frac{13!}{2!(13-2)!} = \frac{13\times11\times11!}{(2\times1)11!} = ۷۸$$

مثال : از ۳ سیب قرمز و ۴ سیب زرد ، ۴ سیب انتخاب می کنیم . به طوری که از ها رنگ سیب ۲ عدد انتخاب شده باشد . فضای نمونه آن چند عضو دارد ؟

$$C\binom{3}{2} \times C\binom{4}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \times \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{3\times2\,!}{2!\,2!} = \frac{4\times3\times2!}{2!\,2!} = ۳ \times ۶ = ۱۸$$

نکته : اگر بخواهیم n شی متمایز بین k نفر تقسیم کنیم از فرمول زیر استفاده می کنیم .

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}$$

نکته : اگر بخواهیم n شی مشابه بین k نفر تقسیم کنیم از فرمول زیر استفاده می کنیم .

$$\mathbf{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!}$$

مثال : به چند طریق می توان ۶ خودکار با رنگ های مختلف را بین ۴ نفر تقسیم کرد ؟

$$\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(6+4-1)!}{(4-1)!} = \frac{9!}{3!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3!}{3!} = ۶۰۴۸۰$$

مثال : به چند طریق می توان ۲۰ شکلات را بین ۱۲ نفر تقسیم کرد ؟

$$\frac{31!}{20!} = \frac{31\times30\times29\times28\times27\times26\times25\times24\times23\times22\times21\times20!}{20!} = ۳۳۷۹۸۴۷۸۶۳۳۹۲۰۰۰$$

$$\frac{(n+k-1)!}{n!} = \frac{(20+12-1)!}{20!} =$$

مثال : از بین ۱۰ کارمند مرد و ۵ کارمند زن به چند طریق می توان ۴ نفر را انتخاب نمود به طوری که محدودیتی در انتخاب نداشته باشیم ؟

$$= ۱۳۶۵$$

$$C\binom{15}{4} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \times \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15\times14\times13\times12\times11!}{(4\times3\times2\times1)\ 11!}$$

ب) ۲ مرد و ۲ زن باشند .

$$= \frac{10\times9\times8!}{(2\times1)\ 8!} = \frac{5\times4\times3!}{2!\ 3!} = ۴۵ \times ۱۰ = ۴۵۰$$

$$C\binom{10}{2} \times C\binom{5}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} \times \frac{5!}{2!(5-2)!}$$

ضریب چولگی (پیرسون) : ساده ترین مشخصه ی انحراف یا چولگی است که از رابطه زیر به دست می آید . $P = \frac{\bar{x} - M_o}{\delta}$ که

به سه حالت زیر است : ۱.اگر مثبت شود می گوییم چولگی راست . ۲.اگر منفی باشد می گوییم چولگی چپ . ۳.و اگر صفر شود عدم چولگی را نشان می دهد .

مثال : اگر ۲۰ = $\bar{x}$ و ۲۳ = M_o و انحراف معیار ۴/۷۵ باشد . ضریب چولگی پیرسون را به دست آورید .

چولگی چپ

$$\mathbf{P} = \frac{\bar{x} - M_o}{\delta} = \frac{20-23}{4/75} = \frac{-3}{4/75} = ۰/۶۳$$

مثال : ضریب چولگی پیرسون جدول زیر را بدست آورید .

داده ها	f_i	x_i	$F_i\,X_i$	$f_i\ (x_i - \bar{x})^2$
۶−۱۰	۲۰	$\frac{6+10}{2}$ = ۸	۱۶۰	$14/2)^2$ = ۷۶۸/۸ ۲۰ (۸−
−۱۴ ۱۰	۳۰	$\frac{10+14}{2}$ = ۱۲	۳۶۰	$14/2)^2$ = ۱۴۵/۲ ۳۰ (۱۲−
−۱۸ ۱۴	۲۵	$\frac{14+18}{2}$ = ۱۶	۴۰۰	− $14/2)^2$ = ۸۱ ۲۵ (۱۶
−۲۲ ۱۸	۲۵	$\frac{18+22}{2}$ = ۲۰	۵۰۰	− $14/2)^2$ = ۸۴۱ ۲۵ (۲۰
۱۰۰ = N		۵۶	۱۴۲۰	۱۸۳۶

$$+\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right) \cdot C$$

$M_o = L_i$ $\qquad\qquad$ $\bar{x} = \frac{1420}{100} = ۱۴/۲$

d_2 = ۳۰ − ۲۵ = ۵ $\qquad\qquad$ = ۳۰ − ۲۰ = ۱۰

d_1

$$M_o = ۱۰ + \left(\frac{10}{10+5}\right) \times ۴ = ۱۰ + \frac{40}{15} = ۱۰ + ۲/۶۶ = ۱۲/۶۶$$

$$\sqrt{\delta} = \sqrt{18/36} = ۴/۲۸$$

$\sqrt[2]{\delta^2} = \sqrt{18/36}$ $\qquad\qquad$ $\delta^2 = \mathbf{v} = ۱۸/۳۶$

چولگی $\qquad\qquad$ **راست**

$$P_{AS} = \frac{14/2 - 12/66}{4/28} = \frac{1/54}{4/28} = ۰/۳۵$$