نام درس: سخت افزار

استاد: سمیه اسکندری

۱

سیستم‌های دودویی (باینری[1])

هدف: آشنایی با اصول کامپیوتر و سیستم‌های دیجیتال، اعداد باینری یا دودویی[2]، مبنا و مکمل اعداد، انواع کدهای دودویی... حافظه‌ها، ثبات‌ها و منطق دودویی

چشم‌انداز این فصل

۱ ـ کامپیوترها و سیستم‌های دیجیتال[3] (رقمی)
۲ ـ اعداد باینری یا دودویی
۳ ـ تبدیل مبنای اعداد
۴ ـ اعداد مبنای هشت و شانزده
۵ ـ مکمل‌های[4] اعداد
۶ ـ اعداد دودویی علامت‌دار
۷ ـ کدهای دودویی[5]
۸ ـ حافظه‌ها و ثبات‌های[6] دودویی
۹ ـ منطق دودویی
۱۰ ـ منابع
۱۱ ـ تمرین
۱۲ ـ حل چند تمرین نمونه

1 - Binary Systems
2 - Binary Numbers
3 - Digital Computers and Digital Systems
4 - Complements
5 - Binary Codes
6 - Registers

۱-۱- کامپیوترها و سیستم‌های دیجیتالی (رقمی)

اکثر پیشرفت‌های علمی، صنعتی و اقتصادی دنیای امروز که شاهد آن هستیم، بدون کامپیوتر حاصل نمی‌شده است. تحقق برنامه‌های فضایی، بدون کنترل و نظارت مستمر کامپیوتر غیرممکن بوده است. یکی از مزیت‌های اصلی کامپیوتر، همه منظوره‌بودن آن است. کامپیوتر یکسری دستورات به نام برنامه را به‌صورت پشت سرهم اجرا می‌نماید. علاوه بر این می‌توان دستورات و داده‌ها را متناسب با نیاز تغییر داد. لذا کامپیوتر در محاسبات علمی، تجاری، فضایی، آموزشی، گرافیکی ... ترافیک ... و بسیاری دیگر از رشته‌ها به‌طور وسیع به‌کار می‌رود.

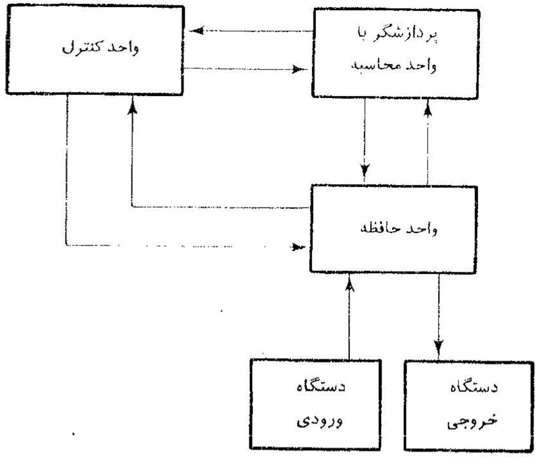
کامپیوتر **یک مثال** مناسبی از سیستم‌های دیجیتال است. نمونه‌های دیگر سیستم‌های دیجیتال، مراکز تلفن، ولتمترهای دیجیتال، کنتورها، ماشین حساب‌ها ... می‌باشند. سیستم‌های دیجیتال بر روی اطلاعات گسسته[1] کار می‌کنند، که این اطلاعات می‌تواند پالس‌های الکتریکی، رقم یا اعداد، حروف الفبا، علامت‌ها و سمبول‌های مخصوص مانند علامت سؤال، پرانتز ... یا هر نوع سمبول معنی‌دار دیگر باشد.

اطلاعات از به هم پیوستن حروف، رقم‌ها و سمبول‌ها شکل گرفته و به وجود می‌آیند. **به عنوان مثال** حروف d و o و g کلمه dog را درست می‌کنند و ارقام 2 و 3 و 7 عدد 237 را به وجود می‌آورند. کامپیوترهای اولیه بیشتر برای محاسبات بر روی رقم‌ها و اعداد به‌کار برده می‌شدند و به همین دلیل نام «کامپیوترهای دیجیتال» یا «رقمی» به آن‌ها داده شد.

در یک سیستم دیجیتال، اطلاعات با سیگنال‌های الکتریکی جریان و یا ولتاژ نمایش داده می‌شوند. سیگنال‌های الکتریکی در سیستم‌های دیجیتال امروزی فقط دارای دو مقدار 0 و 1 به نام باینری[2] یا دودویی هستند. چنانچه در این سیستم‌ها به جای دو مقدار مثلاً ده مقدار انتخاب کنیم و برای هر مقدار یک ولتاژ نظیر داشته باشیم، در این صورت دقت سیستم پایین می‌آید. و بالعکس اگر یک ترانزیستور در دو حالت قطع و وصل کار کند، و دارای دو مقدار سیگنال باشد، دقت سیستم بالا خواهد رفت. با توجه به مطالب فوق در سیستم‌های دیجیتال ما فقط دو مقدار 1 و 0، نظیر قطع و وصل یک ترانزیستور را به کار می‌بریم.

اطلاعات کامپیوتری مانند سیستم پرداخت حقوق که شامل نام، شماره کارمندی، مقدار حقوق، مالیات، فیش حقوق و ... است، از حروف برای نام و رقم‌ها، جهت مقدار حقوق و همچنین سمبول‌هایی مانند دلار، $، استفاده می‌کند. کامپیوتر[3] که اصطلاحاً کامپیوتر دیجیتالی[4] یا رقمی نیز نامیده می‌شود، از پردازشگر[5] یا واحد محاسبه، واحد حافظه، دستگاه‌های ورودی و خروجی و واحد کنترل تشکیل شده است (شکل ۱-۱).

1 - Discret Element
2 - Binary
3 - Computer
4 - Digital Computer
5 - Processor



شکل (۱-۱)
دیاگرام بلوکی یک کامپیوتر دیجیتال

پردازشگر عملیات محاسباتی و دستورات برنامه را اجرا می‌نماید و حافظه برنامه و داده‌ها و همچنین اطلاعات ورودی و خروجی را ذخیره می‌کند.

واحد کنترل دستورات را یکی، یکی، از حافظه می‌خواند و فرمان‌های لازم را برای اجرای دستورات مذکور، به پردازشگر می‌دهد.

دستگاه ورودی مانند صفحه کلید، برنامه و داده‌ها را که توسط کاربر وارد شده به حافظه منتقل می‌نماید. و دستگاه‌های خروجی مانند چاپگر، نتیجه محاسبات را دریافت می‌نماید و آنرا برای کاربر چاپ می‌کند. در حقیقت دستگاه‌های ورودی - خروجی، سیستم‌های دیجیتالی هستند که با وسایل الکترومکانیکی ساخته شده‌اند و به وسیله مدارهای دیجیتالی کنترل می‌شوند.

ماشین حساب یک سیستم دیجیتال شبیه کامپیوتر است که ورودی آن صفحه کلید و خروجی آن لامپ‌های نمایش اعداد می‌باشد. دستورات در ماشین حساب به وسیله کلیدهای عملیاتی مانند جمع '+' و تفریق '-' و داده‌ها نیز توسط کلیدهای مخصوص اعداد به ماشین‌حساب داده می‌شوند و بالاخره نتیجه محاسبات روی لامپ‌های نمایش اعداد نشان داده می‌شود. بعضی ماشین‌حساب‌ها، ساختار نزدیکتری به کامپیوتر دارند، به این معنی که امکانات برنامه‌ریزی و چاپ اطلاعات را نیز دارند.

البته کامپیوتر دیجیتال خیلی قویتر از ماشین‌حساب است، چون کامپیوتر می‌تواند چندین دستگاه ورودی و خروجی داشته باشد. و نه تنها محاسبات ریاضی را انجام می‌دهد، بلکه عملیات منطقی را نیز اجرا می‌نماید علاوه بر این می‌تواند برای تصمیم‌گیری با توجه به شرایط داخلی یا خارجی برنامه‌ریزی شود.

کامپیوتر دیجیتال از تعدادی واحدهای دیجیتال تشکیل شده است. برای درک هر واحد دیجیتال، داشتن دانش اولیه راجع به سیستم‌های دیجیتال و طرز کار آن‌ها لازم می‌باشد. لذا چهار فصل اوّل کتاب در مورد ابزارهای اولیه طراحی دستگاه‌های دیجیتال، مانند اعداد و کُدهای دودویی، جبر بول و بلوک‌هایی که از آن‌ها مدارهای الکترونیک دیجیتال ساخته می‌شوند را بحث می‌نماید. فصل‌های ۵ و ۷ اجزاء اصلی، واحد پردازشگر کامپیوتر دیجیتال را معرفی می‌نماید. طرز کار واحد حافظه در انتهای فصل ۷ شرح داده می‌شود. طراحی واحد کنترل در فصل ۸ مورد بررسی قرار می‌گیرد، که در این حالت از اصول مدارهای ترتیبی که در فصل ۶ توضیح داده شده، بهره گرفته می‌شود.

همانطوری که قبلاً اشاره شد، کامپیوترهای دیجیتال بر روی اعداد دودویی عملیات انجام می‌دهند. و عملوندهای[1] مورد استفاده در محاسبات نیز ممکن است در سیستم اعداد دودویی بیان شوند. رقم‌های در مبنای ده هم، به‌صورت اعداد دودویی نمایش داده می‌شوند. پردازش داده‌ها به وسیله اجزاء منطقی، که اطلاعات دودویی را به‌کار می‌برند، انجام می‌شود. و بالاخره تمام مقادیر در حافظه به‌صورت داده‌های باینری، یا دودویی ذخیره می‌شوند. هدف این فصل معرفی مفاهیم انواع سیستم‌های دودویی به عنوان یک چهارچوب مرجع، به منظور مطالعه جزئیات بیشتر در فصل‌های بعدی می‌باشد.

۱ ـ ۲ ـ اعداد باینری یا دودویی

یک عدد در مبنای ده مثلاً عدد 7392 مقداری معادل 7 هزارتایی، 3 صدتایی، به‌علاوه 9 ده‌تایی به اضافه 2 یکی را نشان می‌دهد، که مقادیر هزارگان، صدگان، دهگان... توان‌هایی از 10 متناسب با مکان ضرایب هستند. در حقیقت عدد 7392 را باید به‌صورت زیر نوشت:

$$7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

ولی طبق قرارداد فقط ضرایب عدد نوشته می‌شوند و از مکان این ضرایب، توان‌های 10 آن‌ها نتیجه می‌شوند. به‌طور کلی یک عدد با نقطه اعشاری در مبنای ده را، می‌توان با یک سری ضرایب طبق زیر نشان داد.

$$a_5a_4a_3a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}$$

که a_j یکی از ده رقم 0, 1, 2, ... ,9 می‌باشد و اندیس j ارزش مکان آن رقم را نشان می‌دهد، که باید ضریب مذکور در 10 به توان j ضرب شود. به این ترتیب عدد مذکور به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$10^5a_5 + 10^4a_4 + 10^3a_3 + 10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0 + 10^{-1}a_{-1} + 10^{-2}a_{-2} + 10^{-3}a_{-3}$$

به‌طور کلی سیستم اعداد دهدهی در مبنا یا پایه 10 می‌باشد، در این سیستم، چون ده رقم به‌کار می‌رود،

1 - Operands

ضرایب نیز در توان‌های 10 ضرب می‌شوند. ولی ضرایب a_j در سیستم اعداد دودویی، فقط دو مقدار 0 و 1 را به‌کار می‌برند، لذا هر ضریب a_j در سیستم اعداد دودویی در 2^j ضرب می‌گردد. **به عنوان مثال** عدد دودویی 11010.11 معادل عدد 26.75 در پایه ده می‌باشد که از ضرب توان‌های 2 در ضرایب عدد دودویی به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 26.75$$

به‌طور کلی یک عدد در مبنای r به‌صورت حاصل‌ضرب توان‌های r، در ضرایب مربوطه مطابق ذیل بیان می‌شود.

$$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot r^2 + a_1 \cdot r + a_0 + a_{-1} \cdot r^{-1} + a_{-2} \cdot r^{-2} + \cdots + a_{-m} \cdot r^{-m}$$

که ضرایب a_j بین ۰ تا $r - 1$ می‌باشند.

برای تشخیص اعداد در پایه‌های مختلف، ضرایب عدد را داخل پرانتز می‌نویسیم و مبنای عدد را به عنوان اندیس در بیرون پرانتز قرار می‌دهیم (به استثنای اعداد در مبنای ده، که دهدهی‌بودن آن بدیهی است). **به عنوان مثال دیگر** عدد $(4021.2)_5$ در مبنای 5، که در آن از رقم‌های 0 تا 4 استفاده می‌شود به‌صورت:

$$(4021.2)_5 = 4 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 \times 5^0 + 2 \times 5^{-1} = (511.4)_{10}$$

می‌باشد که برابر عدد $(511.4)_{10}$ در مبنای ده است.

اگر مبنای عدد کمتر از 10 باشد، برای r رقم ضرایب، از رقم‌های اعداد مبنای 10 استفاده می‌شود. درصورتی که سیستم اعداد دارای مبنای بزرگتر از 10 باشد، در این حالت حروف الفبای انگلیسی، برای رقم‌های بالاتر از 10 به‌کار برده می‌شود. **به عنوان مثال** در سیستم اعداد هگزادسیمال[1] یا شانزده‌تایی که پایهٔ آن 16 می‌باشد، برای ده رقم کوچکتر از رقم‌های سیستم اعداد دهدهی استفاده می‌شود و حروف A, B, C, D, E, F به‌ترتیب برای رقم‌های 10, 11, 12, 13, 14, 15 به‌کار می‌روند. **به عنوان مثال** یک عدد هگزادسیمال (شانزده‌تایی) در مبنای شانزده $(B65F)_{16}$ برابر می‌باشد با:

$$(B65F)_{16} = 11 \times 16^3 + 6 \times 16^2 + 5 \times 16 + 15 = (46687)_{10}$$

جدول ۱-۱ اعداد 0 تا 15 در سیستم اعداد دهدهی، دودویی، اُکتال[2] (هشت‌تایی) و هگزادسیمال (شانزده‌تایی) را نشان می‌دهد.

1 - Hexadecimal 2 - Octal

جدول (۱-۱)
اعداد با مبناهای مختلف

شانزده تایی (مبنای16)	هشت تایی (مبنای 8)	دودویی (مبنای 2)	دهدهی (مبنای 10)
0	00	0000	00
1	01	0001	01
2	02	0010	02
3	03	0011	03
4	04	0100	04
5	05	0101	05
6	06	0110	06
7	07	0111	07
8	10	1000	08
9	11	1001	09
A	12	1010	10
B	13	1011	11
C	14	1100	12
D	15	1101	13
E	16	1110	14
F	17	1111	15

عملیات ریاضی با اعداد مبنای r دارای همان قوانین اعداد دهدهی می‌باشد، البته اگر مبنای اعداد غیر از 10 باشد، باید دقت نمود که فقط r رقم مجاز آن مبنا استفاده می‌شود. **به عنوان مثال** عملیات جمع و تفریق ضرب دو عدد دودویی به طریق زیر است.*

مضروب فیه:	1011	مفروق منه:	101101	مضاف الیه:	101101
مضروب:	× 101	مفروق:	−100111	مضاف:	+100111
	1011	باقیمانده:	000110	حاصل جمع:	1010100
	0000				
	1011				
حاصل‌ضرب:	110111				

حاصل‌جمع دو عدد دودویی دارای همان قوانین اعداد در مبنای ده است، به استثناء اینکه رقم‌های جموع فقط 0 یا 1 هستند.* هر بیت نقلی[1]* که در هر مکانی از رقم‌ها به وجود آید در یک محل با ارزش‌تر در مع وارد می‌شود. عمل تفریق نیز مانند تفریق اعداد دهدهی است، به این معنی که رقم قرضی[2] در هر مکان شخص، دو واحد به مفروق‌منه اضافه می‌کند* (یک رقم قرضی در سیستم اعداد دهدهی، 10 واحد به رقم بروق‌منه اضافه می‌نماید). عملیات ضرب نیز بسیار آسان است، چون رقم‌های مضروب همیشه 1 یا 0 ستند، لذا حاصل‌ضرب‌های جزئی یا برابر مضروب‌فیه، یا 0 می‌باشند.*

* در بخش‌های بعدی و فصل‌های ۴ و ۸ توضیحات بیشتری داده می‌شود.

1 - Carry

2 - Borrow

۱-۳-تبدیل مبنای اعداد

یک عدد دودویی را می‌توان به معادل آن در مبنای ده تبدیل نمود، برای این کار مجموع توان‌های 2 آن ضرایبی که مقدار آن‌ها 1 است را، با هم جمع می‌کنیم. **به عنوان مثال** عدد ذیل را در نظر می‌گیریم:

$$(1010.011)_2 = 2^3 + 2^1 + 2^{-2} + 2^{-3} = (10.375)_{10}$$

عدد دودویی فوق دارای چهار 1 است که معادل دهدهی آن با جمع توان‌های 2 آن بدست می‌آید. به‌طور مشابه می‌توان هر عدد در پایه r را به‌وسیله مجموع حاصل‌ضرب‌های هرضریب، در توان r نظیر، به‌عدد دهدهی معادل آن تبدیل نمود. **مثال زیر** یک نمونه از تبدیل عدد اُکتال (مبنای هشت) به مبنای ده را نشان می‌دهد.

$$(630.4)_8 = 6 \times 8^2 + 3 \times 8 + 4 \times 8^{-1} = (408.5)_{10}$$

برای تبدیل عددی در مبنای ده، به عدد دودویی یا هر عدد در پایه r، بهتر است قسمت صحیح و کسری عدد را مجزا کرده، و هر قسمت را به‌طور جداگانه تبدیل نماییم. برای روشن‌شدن مطلب تبدیل یک عدد صحیح در مبنای ده به معادل دودویی آن با **مثال‌هایی در ذیل** بررسی می‌شود.

مثال ۱-۱: عدد دهدهی 41 را به دودویی تبدیل کنید.

ابتدا 41 را بر 2 تقسیم می‌کنیم، که خارج‌قسمت عدد 20 و باقیمانده 1 می‌شود. خارج‌قسمت را دوباره بر 2 تقسیم می‌نماییم که خارج‌قسمت و باقیمانده جدید به‌دست آید. این روش را آن قدر ادامه می‌دهیم تا خارج‌قسمت صفر شود. در این صورت باقیمانده‌ها (از آخر به اوّل) ضرایب عدد در مبنای دو می‌باشند.

	خارج قسمت	باقیمانده	ضرایب عدد دودویی
$\frac{41}{2} =$	20	1	$a_0 = 1$
$\frac{20}{2} =$	10	0	$a_1 = 0$
$\frac{10}{2} =$	5	0	$a_2 = 0$
$\frac{5}{2} =$	2	1	$a_3 = 1$
$\frac{2}{2} =$	1	0	$a_4 = 0$
$\frac{1}{2} =$	0	1	$a_5 = 1$

پس عدد دودویی معادل، برابر است با:

$$(41)_{10} = (a_5a_4a_3a_2a_1a_0)_2 = (101001)_2$$

روش ریاضی فوق را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

خارج‌قسمت	باقیمانده
41	
20	1
10	0
5	0
2	1
1	0
0	1

جواب = 101001

روش تبدیل عدد صحیح دهدهی، به مبنای r نیز شبیه **مثال فوق** می‌باشد، جز اینکه باید بر پایه r تقسیم شود.

مثال ۱-۲: عدد دهدهی 153 را به مبنای هشت (اُکتال) تبدیل نمایید.

در این حالت مبنای r برابر ۸ می‌باشد، لذا عدد 153 را بر 8 تقسیم می‌کنیم که خارج‌قسمت 19 و باقیمانده 1 می‌شود. خارج‌قسمت 19 را دوباره بر 8 تقسیم می‌نماییم، که خارج‌قسمت جدید 2 و باقیمانده 3 می‌گردد. و بالاخره خارج‌قسمت 2 را بر 8 تقسیم می‌کنیم که خارج‌قسمت جدید 0 و باقیمانده 2 می‌شود. به این ترتیب عدد مذکور برابر $(231)_8$ می‌باشد. این عملیات را به‌صورت مناسب‌تری مطابق ذیل نیز می‌توان نشان داد.

خارج‌قسمت	باقیمانده
153	
19	1
2	3
0	2

جواب $= (231)_8$

در تبدیل قسمت کسری عدد دهدهی به مبنای دو (دودویی) نیز، از روش مشابه قسمت صحیح عدد استفاده می‌گردد. ولی به جای تقسیم، عمل ضرب انجام و قسمت صحیح حاصل شده، به جای باقیمانده استفاده می‌گردد. برای روشن‌شدن مطلب **مثال‌های زیر** را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱-۳: عدد $(0.6875)_{10}$ را به دودویی تبدیل نمایید.

برای این کار ابتدا عدد 0.6875 در 2 ضرب، که یک قسمت صحیح و یک قسمت کسری جدید حاصل می‌شود. قسمت کسری جدید مجدداً در 2 ضرب، می‌شود که یک قسمت صحیح و یک قسمت کسری جدیدتر حاصل می‌شود. این روش آن قدر ادامه می‌یابد، تا قسمت کسری صفر، یا ارقام دارای

دقت کافی باشد. حال ضرایب عدد دودویی از قسمت‌های صحیح به طریق زیر به‌دست می‌آید:

	قسمت صحیح		قسمت کسری	ضرایب عدد دودویی
0.6875 × 2 =	1	+	0.3750	$a_{-1} = 1$
0.3750 × 2 =	0	+	0.7500	$a_{-2} = 0$
0.7500 × 2 =	1	+	0.5000	$a_{-3} = 1$
0.5000 × 2 =	1	+	0.0000	$a_{-4} = 1$

پس: $(0.6875)_{10} = (0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}a_{-4})_2 = (0.1011)_2$: جواب

تبدیل قسمت کسری عدد در مبنای ده، به مبنای r، شبیه روش مذکور می‌باشد، جز اینکه به جای ضرب قسمت کسری در 2، در r ضرب می‌شود و قسمت صحیح حاصل‌ضرب، برابر ضرایب مبنای r می‌باشد. این ضرایب به جای 0 و 1 بین 0 تا $r-1$ هستند. **مثال زیر** این موضوع را روشن‌تر می‌نماید.

مثال ۱-۴: عدد $(0.513)_{10}$ را به مبنای هشت ببرید.

برای این کار عملیات زیر را انجام می‌دهیم.

$$0.513 \times 8 = 4.104$$
$$0.104 \times 8 = 0.832$$
$$0.832 \times 8 = 6.656$$
$$0.656 \times 8 = 5.248$$
$$0.248 \times 8 = 1.984$$
$$0.984 \times 8 = 7.872$$

جواب هفت رقم اعشار عدد، از قسمت صحیح حصل‌ضرب‌ها به‌دست می‌آید. به این ترتیب عدد مذکور در مبنای هشت برابر:

$$(0.513)_{10} = (0.406517\ldots)_8$$

می‌باشد.

برای تبدیل عددی در مبنای ده با قسمت صحیح و کسری، باید قسمت صحیح و کسری آن به‌طور مجزا تبدیل و سپس دو جواب با هم ترکیب گردند.

به عنوان مثال برای تبدیل عدد $(41.6875)_{10}$ از **مثال‌های** (۱-۱) و (۱-۳) داریم:

$$(41.6875)_{10} = (101001.1011)_2$$

و معادل مبنای 8 عدد $(153.513)_{10}$ از **مثال‌های** (۱-۲) و (۱-۴) مساوی:

$$(153.513)_{10} = (231.406517)_8$$

می‌باشد.

۱-۴- اعداد مبنای هشت و شانزده

در کامپیوترها، تبدیل اعداد در مبنای هشت و شانزده، به دودویی و بالعکس بسیار مهم می‌باشد. چون $8 = 2^3$ و $16 = 2^4$ است، پس هر رقم مبنای هشت معادل سه بیت عدد دودویی و هر رقم مبنای شانزده معادل چهار بیت عدد دودویی می‌باشد. تبدیل عدد در مبنای دو به هشت، با گروه گروه کردن عدد دودویی به دسته‌های سه تایی از نقطه اعشاری (ممیز) به چپ و راست حاصل می‌شود. و به جای هر سه بیت عدد دودویی، یک رقم معادل در مبنای هشت قرار می‌گیرد. **مثال ذیل** این مطلب را نشان می‌دهد.

$$(\underbrace{10}_{2}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{011}_{3}\ .\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{100}_{4}\ \underbrace{000}_{0}\ \underbrace{110}_{6})_2 = (26153.7460)_8$$

تبدیل عدد دودویی به مبنای شانزده نیز شبیه روش فوق می‌باشد، با این تفاوت که عدد دودویی به دسته‌های چهارتایی از ارقام گروه‌بندی می‌شود. **به عنوان مثال** عدد دودویی ذیل برابر:

$$(\underbrace{10}_{2}\ \underbrace{1100}_{C}\ \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1011}_{B}\ .\ \underbrace{1111}_{F}\ \underbrace{0010}_{2})_2 = (2C6B.F2)_{16}$$

عدد $(2C6B.F2)_{16}$ در مبنای شانزده می‌گردد. رقم‌های اعداد در مبناهای شانزده و هشت و مقادیر نظیر دودویی آن‌ها را، با مطالعه جدول (۱-۱) به آسانی می‌توان به‌خاطر سپرد.

تبدیل اعداد در مبنای هشت و شانزده، به مبنای دو، با روشی عکس روش بالا انجام و هر رقم در مبنای هشت، به سه رقم دودویی معادل آن، تبدیل می‌گردد. به‌طور مشابه هر رقم مبنای شانزده، به چهار رقم مبنای دو آن تبدیل می‌شود. این مطلب **در مثال زیر** نشان داده شده است.

$$(673.124)_8 = (\underbrace{110}_{6}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{011}_{3}\ .\ \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{100}_{4})_2$$

$$(306.D)_{16} = (\underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0110}_{6}\ .\ \underbrace{1101}_{D})_2$$

کارکردن با اعداد دودویی کمی مشکل است، به دلیل اینکه تعداد رقم‌های آن سه یا چهار برابر معادل دهدهی آن می‌باشد. **به عنوان مثال** عدد دودویی 111111111111 معادل عدد دهدهی 4095 است. به هر حال کامپیوترها، رقم‌های دودویی به‌کار می‌برند، از طرفی بعضی اوقات لازم است، اپراتور یا کاربر مستقیماً از طریق اعداد دودویی با ماشین ارتباط برقرار کند. راهی که بتوان سیستم اعداد دودویی را در کامپیوتر به‌کار برد و در ضمن تعداد ارقام اعداد را کم نمود، این است که از ارتباط بین اعداد دودویی و اعداد در مبنای هشت و شانزده استفاده نمود. با این روش شخص با اعداد در مبنای هشت یا شانزده کار می‌کند و هر زمان ارتباط مستقیم با ماشین لازم باشد، عمل تبدیل انجام می‌گیرد. **به عنوان مثال** عدد دودویی 111111111111 دارای ۱۲ رقم دودویی است که با چهار رقم در مبنای هشت برابر 7777 و با سه رقم در مبنای شانزده مساوی FFF بیان می‌شود. در ارتباط بین کاربر و کامپیوتر، نمایش اعداد در مبنای هشت، یا شانزده از نمایش مبنای

دو آسانتر است. چون در این مبناها، اعداد به‌طور فشرده‌تر، با یک سوم یا یک چهارم تعداد ارقام دودویی بیان می‌شوند. موقعی که شخص با ماشین رابطه برقرار می‌کند (از طریق کنسول یا سوئیچ یا لامپ‌های راهنما، یا برنامه به زبان ماشین) تبدیل اعداد از مبنای هشت یا شانزده به معادل دودویی و یا عکس آن بسیار ساده توسط کاربر انجام می‌شود.

۱-۵- مکمل‌های اعداد

در کامپیوترهای دیجیتال، مکمل‌های اعداد برای عمل تفریق، یا عملیات منطقی به‌کار برده می‌شوند. اعداد مبنای r، مکمل r و مکمل $r - 1$ دارند. موقعی که مبنای r برابر 2 باشد، مکمل 1 و مکمل 2 برای اعداد دودویی داریم و اگر مبنا ده باشد مکمل 9 و مکمل 10 خواهیم داشت.

مکمل $r - 1$ اعداد:

اگر عدد N در پایه r، دارای n رقم باشد، مکمل $r - 1$ عدد N طبق تعریف برابر $(r^n - 1) - N$ می‌باشد. برای اعداد دهدهی $r = 10$، مکمل $r - 1 = 9$ عدد N، برابر $(10^n - 1) - N$ می‌باشد. در این حالت عدد 10^n به‌صورت 1 و n صفر سمت راست آن است، درنتیجه $10^n - 1$ نمایش عددی با n رقم 9 می‌باشد. **به عنوان مثال** اگر $n = 4$ باشد $10^4 = 10000$ و $10^4 - 1 = 9999$ می‌باشند. لذا مکمل 9 هر عدد در مبنای ده، با تفریق هر رقم آن از رقم 9 حاصل می‌شود. **مثال‌های ذیل** این مطلب را روشن‌تر می‌نماید.

مکمل 9 عدد 546700 برابر: $999999 - 546700 = 453299$ و مکمل 9 عدد 012398 مساوی: $999999 - 012398 = 987601$ می‌باشند.

برای اعداد دودویی $r = 2$ و $r - 1 = 1$ است، لذا مکمل 1 عدد N برابر $(2^n - 1) - N$ می‌باشد. در این حالت نیز 2^n برابر عددی دودویی است که، یک 1 و تعداد n صفر به دنبال آن می‌آید و $2^n - 1$ نیز دارای n رقم 1 می‌باشد. **به عنوان مثال** اگر $n = 4$ باشد $2^4 = (10000)_2$ و $2^4 - 1 = (1111)_2$ است. بنابراین مکمل 1 هر عدد دودویی با تفریق هر رقم آن از 1 به‌دست می‌آید. از طرفی با کم‌کردن رقم‌های دودویی 0 و 1 از 1 به یکی از دو حالت $1 - 0 = 1$ یا $1 - 1 = 0$ برمی‌خوریم که باعث می‌شود رقم 0 به 1 و رقم 1 به 0 تبدیل شود. لذا مکمل 1 هر عدد دودویی از تبدیل 0ها به 1 و 1ها به 0 حاصل می‌شود. **مثال‌های زیر** این موضوع را نشان می‌دهد.

مکمل 1 عدد 1011000 برابر 0100111 و مکمل 1 عدد 0101101 مساوی 1010010 می‌باشد. مکمل $r - 1$ اعداد در مبنای هشت و شانزده نیز، با تفریق هر رقم آن‌ها به‌ترتیب از 7 و F (15 دهدهی) حاصل می‌شود.

مکمل r اعداد:

طبق تعریف مکمل r عدد n رقمی N، در پایه r برابر $r^n - N$ می‌باشد و مکمل r عدد 0 نیز مساوی صفر است. ملاحظه می‌شود مکمل r با جمع عدد 1 به مکمل $r - 1$ اعداد حاصل می‌شود، چون $r^n - N = [(r^n - 1) - N] + 1$ می‌باشد. بنابراین مکمل 10 عدد دهدهی 2389 مساوی مکمل 9 آن یعنی 7610 بعلاوه 1 برابر می‌شود یا $7611 = 1 + 7610$ مکمل 2 عدد دودویی 101100 نیز، با اضافه کردن عدد 1 به مکمل 1 آن یعنی $010100 = 1 + 010011$ حاصل می‌گردد. چون نمایش عدد 10^n به‌صورت 1 و n صفر سمت راست آن است، لذا مکمل 10 عدد N که برابر $10^n - N$ می‌باشد را، می‌توان به طریق زیر به‌دست آورد:

- از طرف راست، کم‌ارزش‌ترین رقم‌های صفر، بدون تغییر می‌مانند.
- اولین رقم سمت راست که صفر نیست، از ده تفریق می‌گردد.
- بقیه رقم‌ها از 9 تفریق می‌شوند.

به عنوان مثال: مکمل 10 عدد 012398 برابر 987602 می‌باشد، چون در اینجا کم‌ارزش‌ترین رقم یعنی 8 از 10 تفریق شده و بقیه رقم‌ها از 9 تفریق شده‌اند و مکمل 10 عدد 246700 مساوی 753300 است، چون در این حالت دو صفر سمت راست کم‌ارزش‌تر بدون تغییر مانده، و اولین رقم سمت راست غیرصفر یعنی 7 از 10 تفریق شده و بقیه رقم‌ها از 9 تفریق شده‌اند. به‌طور مشابه مکمل 2 اعداد نیز به طریق زیر حاصل می‌شود:

- از سمت راست، کم‌ارزش‌ترین رقم‌های صفر، بدون تغییر می‌مانند.
- اولین رقم 1 از سمت راست، بدون تغییر باقی می‌ماند.
- بقیه رقم‌های با ارزش‌تر، با جایگزین‌شدن 1 و 0، به‌ترتیب به جای 0 و 1 حاصل می‌شود.

به عنوان مثال: مکمل 2 عدد هفت بیتی 1101100 مساوی 0010100 می‌باشد، چون در اینجا دو صفر سمت راست با ارزش کمتر، بدون تغییر مانده و اولین رقم 1 سمت راست نیز تغییر نکرده، برای چهار رقم پرارزش‌تر، 1ها به 0 و 0ها به 1 تبدیل گردیده‌اند.

مکمل 2 عدد هفت بیتی 0110111 نیز مساوی 1001001 می‌باشد، چون در این حالت اولین رقم 1 سمت راست، بدون تغییر مانده و بقیه رقم‌ها مکمل شده‌اند، یعنی 0ها به 1 و 1ها به 0 تبدیل گردیده‌اند.

در تعاریف قبلی فرض شده که ارقام دارای ممیز نیستند. اگر عدد N ممیز داشته باشد، باید به‌طور موقت ممیز را حذف نمود و مکمل r و مکمل $r - 1$ عدد را به‌دست آورد، سپس ممیز را در همان مکان نسبی اولیه قرار داد. در اینجا باید متذکر شد، که مکمل، مکمل عدد، برابر خود عدد می‌گردد، چون مکمل r عدد N برابر $r^n - N$ است و مکمل مربوط به این مکمل، مساوی $r^n - (r^n - N) = N$ می‌باشد، یعنی عدد اولیه حاصل می‌شود.

تفریق به کمک مکمل‌ها:

روش تفریقی که در مدرسه بحث می‌شود از رقم قرضی استفاده می‌نماید. در این روش، موقعی که رقم مفروق، کوچکتر از رقم مفروق‌منه باشد، یک واحد از رقم با ارزش‌تر قرض گرفته می‌شود. این روش با مداد و کاغذ راحت‌ترین راه به‌نظر می‌رسد. ولی موقعی که تفریق با مدادهای دیجیتالی یا سخت‌افزار پیاده‌سازی شود، به‌کار بردن مکمل‌ها آسانتر از راه‌حل قبلی می‌باشد.

تفریق دو عدد n رقمی بدون علامت $M - N$، در پایه r را می‌توان به طریق زیر انجام داد.

۱- به مفروق‌منه M مکمل r مفروق N اضافه می‌شود یعنی:

$$M + (r^n - N) = M - N + r^n$$

۲- اگر $N \leq M$ باشد مجموع یک بیت نقلی نهایی[1] r^n تولید خواهد کرد، که از آن صرفنظر می‌شود، در نتیجه آنچه باقی می‌ماند $N - M$ است.

۳- اگر $N > M$ باشد، مجموع بیت نقلی نهایی را تولید نمی‌کند و برابر $r^n - (N - M)$، یعنی مکمل r عدد $N - M$ است. برای به‌دست‌آوردن جواب به‌صورت معمولی می‌توان مکمل r مجموع را در نظر گرفت و علامت منفی جلوی آن قرار داد. **مثال‌های زیر** این مطلب را روشن می‌نماید.

مثال ۱-۵: با به‌کار بردن مکمل 10، تفریق 3250 − 72532 را انجام دهید.

M =	72532
مکمل 10 عدد N =	+ 96750
حاصل جمع =	169282
حذف رقم نقلی نهایی 10^5 =	−100000
جواب =	69282

رقم نقلی نهایی

در این مثال M یک عدد ۵ رقمی و N چهاررقمی است. ولی هر دو عدد باید تعداد رقم‌های مساوی داشته باشند، لذا عدد N به‌صورت 03250 نوشته می‌شود. در این صورت مکمل 10 عدد N، رقم 9 را در با ارزش‌ترین محل عدد ایجاد می‌نماید. تولید رقم نقلی نهایی بیانگر این است که $N \leq M$ است و نتیجه مثبت می‌باشد.

1- End Carry در مثال‌های بعد روشن‌تر می‌شود

مثال ۱-۶: با به‌کار بردن مکمل 10، تفریق 3250 − 72532 را انجام دهید.

M = 03250
N مکمل 10 عدد = + 27468
حاصل جمع = 30718

رقم نقلی نهایی وجود ندارد. لذا:

جواب = −(مکمل 10 عدد 30718) = − 69282

در این مثال چون 3250 < 72532 است نتیجه منفی می‌باشد. در اینجا چون با اعداد بدون علامت کار می‌کنیم، راهی برای گرفتن نتیجه بدون علامت وجود ندارد. موقعی که عمل تفریق را با مکمل‌ها انجام می‌دهیم، حاصل منفی، با نبودن رقم نقلی نهایی و مکمل‌بودن نتیجه مشخص می‌شود. البته زمانی که با مداد و کاغذ کار می‌کنیم، می‌توانیم نتیجه را به‌صورت عدد، با علامت منفی بنویسیم.
به‌طور مشابه تفریق اعداد دودویی را نیز می‌توان با روش مکمل‌ها انجام داد. برای روشن‌شدن مطلب **مثال‌های زیر** را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱-۷: با فرض اعداد دودویی x = 1010100 و y = 1000011 تفریق‌های: (الف) x − y و (ب) y − x را با روش مکمل 2 انجام دهید.

(الف):

X = 1010100
y مکمل 2 عدد = + 0111101
حاصل جمع = 10010001
رقم نقلی نهایی
رقم نقلی نهایی 2^7 حذف می‌شود. = − 10000000
جواب = x − y = 0010001

(ب):

y = 1000011
x مکمل 2 عدد = + 0101100
حاصل جمع = 1101111
رقم نقلی نهایی ندارد.

جواب: y − x = −(مکمل 2 عدد 1101111) = −0010001

تفریق اعداد بدون علامت را می‌توان با روش مکمل 1 − r نیز انجام داد. البته به‌خاطر داریم که مکمل 1 − r، یک واحد کمتر از مکمل r می‌باشد. به این دلیل اضافه‌نمودن مکمل 1 − r مفروق، به

مفروق‌منه موقعی که رقم نقلی نهایی ایجاد می‌شود، تولید حاصل جمعی می‌کند که یک واحد کمتر از مقدار صحیح تفریق است. برداشتن رقم نقلی نهایی و اضافه کردن آن به حاصل جمع، به نام رقم نقلی چرخشی[1] معروف است.

مثال ۱-۸: مثال ۱-۷ را با به‌کار بردن مکمل 1 تکرار نمایید.

(الف): x − y = 1010100 − 1000011

x = 1010100
y مکمل 1 عدد = + 0111100
حاصل جمع = 10010000
رقم نقلی چرخشی (برداشتن رقم‌نقلی نهایی و اضافه کردن آن به حاصل‌جمع) +1
جواب x − y = 0010001

(ب): y − x = 1000011 − 1010100

y = 1000011
x مکمل 1 عدد = + 0101011
حاصل جمع = 1101110
رقم نهایی وجود ندارد.

جواب: y − x = −(مکمل 1 عدد 1101110) = − 0010001

باید توجه داشت که در این حالت نتیجه منفی با گرفتن مکمل 1 حاصل‌جمع تولید می‌شود. روش به‌کار بردن رقم نقلی چرخشی در تفریق اعداد دهدهی‌بدون علامت، با مکمل 9 نیز قابل اجرا می‌باشد.

۱-۶- اعداد دودویی علامت‌دار

اعداد مثبت و همچنین عدد صفر را می‌توان به عنوان عدد بدون علامت در نظر گرفت، ولی برای نمایش اعداد منفی، ما نیاز به علامت منفی داریم. در ریاضیات معمولی، اعداد منفی با علامت منها و اعداد مثبت با علامت بعلاوه نشان داده می‌شوند. ولی به علت محدودیت‌های سخت‌افزاری، کامپیوتر هر چیز را باید به وسیله رقم‌های دودویی نشان دهد که اصطلاحاً این ارقام بیت‌ها[2] نامیده می‌شوند. معمول این است که آخرین محل سمت چپ بیت‌های یک عدد را، بیت علامت در نظر می‌گیرند، که برای عدد مثبت، بیت علامت صفر و جهت عدد منفی بیت علامت یک می‌باشد.

1 - End Around Carry
2 - Bits

در کامپیوتر اعداد دودویی با علامت یا بدون علامت، با رشته‌ای از بیت‌ها نمایش داده می‌شوند و کاربر است که مشخص می‌نماید آیا عدد با علامت، یا بدون علامت باشد. اگر عدد دودویی علامت‌دار باشد، در این صورت آخرین بیت سمت چپ، بیت علامت و بقیه بیت‌ها نمایش عدد می‌باشند. اگر عدد بدون علامت در نظر گرفته شود، آخرین بیت سمت چپ، پرارزش‌ترین بیت[1] عدد است. **به عنوان مثال** رشته بیت‌های 01001 می‌تواند نمایش عدد 9 (عدد دودویی بدون علامت) و یا 9+ (عدد دودویی با علامت) در نظر گرفته شود، چون آخرین بیت سمت چپ صفر است. و رشته بیت‌های 11001 زمانی که عدد بدون علامت در نظر گرفته شود نمایش عدد دهدهی 25 و در صورتی که با علامت فرض شود، برابر عدد 9− است. چون آخرین بیت سمت چپ 1 می‌باشد که بیانگر عددی منفی است و چهار بیت دیگر نمایش عدد 9 می‌باشد. اصولاً اگر در ابتدا نوع عدد مشخص باشد هیچ‌گونه اشتباهی در تشخیص آن به وجود نمی‌آید.

روش اخیر نمایش اعداد علامت‌دار، به نام سیستم مقدار ـ علامت[2] معروف است. در این طرز نمایش اعداد که در ریاضیات نیز به‌کار می‌رود، یک عدد از یک مقدار، و یک سمبول + یا −، نظیر بیت علامت 0 یا 1 تشکیل می‌شود. موقعی که عملیات ریاضی در یک کامپیوتر پیاده‌سازی می‌شود، مناسب‌تر است، از روش دیگری به نام سیستم مکمل ـ علامت[3] برای اعداد منفی استفاده شود. در سیستم مقدار ـ علامت، عدد به وسیله تغییر علامت منفی می‌شود، ولی در سیستم مکمل ـ علامت عدد با مکمل‌نمودن آن منفی می‌گردد. چون اعداد مثبت همیشه با صفر (مثبت) در سمت چپشان شروع می‌شوند، لذا مکمل آن‌ها همواره با 1 از سمت چپشان آغاز می‌گردند که بیانگر عددی منفی است. در سیستم مکمل ـ علامت می‌توان مکمل 1 یا مکمل 2 به‌کار برد، ولی سیستم اعداد مکمل 2 معمول‌تر می‌باشد.

به عنوان مثال عدد 9 که در سیستم اعداد دودویی با هشت بیت نمایش داده می‌شود را، در نظر می‌گیریم. عدد 9+ با بیت علامت 0، در آخرین محل سمت چپ آن شروع می‌گردد و به دنبال آن، مقدار دودویی عدد 9 به‌صورت 00001001 نشان داده می‌شود. البته لازم است توجه نمود که تمام هشت بیت باید مقدار داشته باشند، لذا بعد از بیت علامت، تا اولین 1، مقدار 0 قرار داده می‌شود (مانند 00001001). گرچه فقط یک روش برای نمایش عدد 9+ وجود دارد، ولی جهت نمایش عدد 9− با هشت بیت سه روش مختلف مطابق ذیل وجود دارد.

- در روش مقدار ـ علامت، عدد 9− با 10001001 نمایش داده می‌شود.
- در روش مکمل 1، عدد 9− با 11110110 نشان داده می‌شود.
- در روش مکمل 2، عدد 9− با 11110111 نمایش داده می‌شود.

در روش مقدار ـ علامت، نمایش 9− با تغییر بیت علامت، (آخرین بیت سمت چپ عدد 9) از 0 به 1 حاصل می‌گردد. در روش مکمل 1، عدد 9− با مکمل نمودن تمام بیت‌های 9+، از جمله بیت علامت به‌دست می‌آید. بالاخره در روش مکمل 2، عدد 9− با مکمل نمودن تمام‌بیت‌های 9+ از جمله بیت علامت بعلاوه 1 حاصل می‌شود.

1 - Most Significant Bit (MSB)
2 - Signed-Magnitude System
3 - Signed-Complement System

سیستم مقدار ـ علامت اعداد، در ریاضیات معمولی به‌کار برده می‌شود، ولی موقعی که در کامپیوتر استفاده می‌گردد، مشکلاتی به همراه دارد. بنابراین معمولاً در کامپیوتر روش مکمل ـ علامت به‌کار برده می‌شود. روش مکمل 1 نیز مشکلاتی را ایجاد می‌نماید و به ندرت برای عملیات ریاضی به‌کار برده می‌شود. این روش جهت عملیات منطقی مفید می‌باشد، چون تبدیل 1 به 0 و 0 به 1، معادل با مکمل‌سازی منطقی است که در فصل بعد بحث خواهد شد. ذیلاً در مورد عملیات ریاضی اعداد دودویی علامت‌دار، به‌ویژه روش مکمل 2 بحث می‌شود، ولی در صورتی که رقم نقلی چرخشی، مانند اعداد بدون علامت منظور شود، برای سیستم اعداد مکمل 1 نیز، روش مشابهی می‌تواند به‌کار رود.

کُد گِری[1] (انعکاسی[2]):

سیستم‌های دیجیتال فقط برای عملیات بر روی داده‌های گسسته طراحی می‌شوند. ولی بسیاری از وسایل فیزیکی، خروجی پیوسته دارند، لذا داده‌ها قبل از ورود به سیستم دیجیتال باید به شکل دیجیتال تبدیل شوند. می‌توان اطلاعات پیوسته یا آنالوگ را با استفاده از مبدل آنالوگ به دیجیتال[3]، به اطلاعات دیجیتال تبدیل نمود. موقعی که اطلاعاتی تبدیل به دیجیتال می‌شوند، بعضی اوقات مناسب‌تر است که این اطلاعات مطابق جدول (۱-۴) باکُد گری نمایش داده شوند. مزیت کُد گِری نسبت به کُد دودویی این است که، موقعی که از یک عدد به عدد دیگر می‌رویم، فقط یک بیت تغییر می‌کند. **به عنوان مثال** در کُد گِری برای رفتن از 7 به 8، کُد گِری آن از 0100 به 1100 تبدیل می‌شود،که فقط اولین بیت سمت چپ از 0 به 1 تغییر کرده و بقیه سه بیت ثابت مانده‌اند. ولی اگر این مطلب را در سیستم دودویی بررسی کنیم ملاحظه می‌شود برای رفتن از 7 به 8، 0111 به 1000 تبدیل می‌شود، یعنی مقدار چهاربیت تغییر می‌کند.

جدول (۱-۴)
کُد چهاربیتی گِری

کُد گری	معادل دهدهی
0000	0
0001	1
0011	2
0010	3
0110	4
0111	5
0101	6
0100	7
1100	8
1101	9
1111	10
1110	11
1010	12
1011	13
1001	14
1000	15

در کاربردهایی که، رشته معمولی اعداد دودویی تولید خطا نماید، کُد گِری به کار برده می‌شود. درصورتی که کُد دودویی استفاده شود، **به عنوان مثال** در اثر تغییر عدد 0111 به 1000 ، اگر زمان تغییر حالت سمت راست‌ترین بیت عدد، بیشتر از بقیه سه بیت باشد، ممکن است کُد میانی 1001 تولید شود که اشتباه است. در

۲

جبر بول و گیت‌های منطقی

هدف: آشنایی با جبر بول، فُرم کانونیک[1] و استاندارد[2] تابع، مینترم[3]، ماکسترم[4]، گیت‌های منطقی، مدارهای مجتمع ...

چشم‌انداز این فصل

۱ ـ تعاریف اولیه
۲ ـ تعریف اصولی جبر بول
۳ ـ قضیه‌ها یا تئوری‌های اصلی و خواص جبر بول
۴ ـ توابع بول
۵ ـ فُرم کانونیک یا متعارف و فُرم استاندارد
۶ ـ سایر عملیات منطقی
۷ ـ گیت‌های منطقی دیجیتال[5]
۸ ـ مدارهای مجتمع
۹ ـ منابع
۱۰ ـ تمرین

1 - Canonical Form
2 - Standard Form
3 - Minterm
4 - Maxterm
5 - Digital Logic Gates

۲ ـ ۱ ـ تعریف‌های اولیه

جبر بول مانند سایر سیستم‌های ریاضی با مجموعه‌ای از عناصر، عملگرها، اصول و بدیهیات تعریف می‌شود. مجموعهٔ عناصر، گروهی از اشیاء هستند که خواص مشترک دارند. اگر S یک مجموعه و x و y دو عنصر مشخص باشند، آنگاه $x \in S$ یعنی x عنصری از مجموعه S است و عبارت $y \notin S$ یعنی y عنصری از مجموعه S نیست. یک مجموعه با تعداد عنصرهای قابل شمارش، بوسیله دو آکولاد مشخص می‌شود مانند: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ یعنی مجموعه عناصر A، اعداد 1، 2، 3، 4 می‌باشند. عملگر دودویی، بر روی عنصرهای مجموعه S عمل می‌کند و قانونی است که به دو عنصر S، عنصر منحصر بفردی منتسب می‌کند. **به عنوان مثال** رابطه $a * b = c$ را در نظر می‌گیریم. در این رابطه گوییم علامت $*$ یک عملگر دودویی است، به شرطی که با قانونی، c را به دو عنصر a و b منتسب کند و رابطه $a, b, c \in S$ برقرار باشد، ولی اگر $a, b \in S$ و $c \notin S$ باشند، در این صورت $*$ عملگر دودویی نیست.

اصول یک سیستم ریاضی، فرضیات پایه‌ای و اولیه را تشکیل می‌دهد، که با آنها می‌توان قوانین، تئوری، و خواص سیستم را نتیجه گرفت. معمول‌ترین اصولی که برای تعریف ساختارهای جبری بکار می‌رود عبارتند از:

۱ ـ بسته بودن[1]: مجموعه S نسبت به عملگر دودویی بسته است، به شرطی که برای هر دو عنصر مجموعه S، این عملگر قانونی برای بدست آوردن عنصر منحصر بفرد دیگری در S برقرار نماید. **به عنوان مثال** مجموعه اعداد طبیعی $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ را نسبت به عملگر جمع (+) بسته می‌گوییم. چون برای هر دو عنصر a و b از این مجموعه، عنصر دیگری مانند $c \in N$ وجود دارد به‌طوری که داریم $a + b = c$. مجموعه اعداد طبیعی نسبت به عملگر تفریق (−) بسته نیست، چون **به عنوان مثال** $2-3 = -1$ است که $2, 3 \in N$، ولی $(-1) \notin N$ می‌باشد.

۲ ـ اصل یا قانون[2] **شرکت پذیری**[3]: عملگر $*$ در مجموعه S دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، اگر رابطه:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

برای هر مقدار $x, y, z \in S$ برقرار باشد.

۳ ـ اصل یا قانون جابه‌جایی[4]: عملگر $*$ در مجموعه S دارای خاصیت جابه‌جایی است هر گاه برای هر مقدار $x, y \in S$ داشته باشیم:

$$x * y = y * x$$

۴ ـ عنصر خنثی[5]: مجموعه S، نسبت به عملگر $*$ دارای عنصر خنثی e است، اگر e متعلق به مجموعه S بوده و برای هر مقدار $x \in S$ عبارت زیر برقرار باشد.

$$e * x = x * e = x$$

به عنوان مثال در مجموعه اعداد صحیح $I = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$، 1 عنصر خنثی برای عملگر ضرب $*$ و 0 عنصر خنثی جهت عملگر جمع + است، چون به‌ترتیب رابطه‌های $x = 1 * x = x * 1$ و

1 - Closure 2 - Law 3 - Associative
4 - Commutative 5 - Identity

$x + 0 = 0 + x = x$ برای هر مقدار $x \in I$ برقرار می‌باشد. مجموعه اعداد طبیعی N دارای عنصر خنثی برای عملگر جمع + نیست، زیرا 0 عضو مجموعه اعداد طبیعی نیست.

۵ ـ وارون[1]: مجموعه S با عنصر خنثی e، دارای وارونی نسبت به عملگر $*$ است، هرگاه که برای هر عنصر $x \in S$ یک مقدار $y \in S$ وجود داشته باشد که در شرط زیر صدق نماید:

$$x * y = e$$

به عنوان مثال در مجموعه اعداد صحیح I، موقعی که عنصر خنثی $e = 0$ باشد، وارون عنصری مانند a در جمع، برابر $(-a)$ است، چون رابطه $a + (-a) = 0$ برقرار می‌باشد.

۶ ـ اصل یا قانون توزیع‌پذیری[2]: اگر $*$ و $\cdot$ دو عملگر دودویی در مجموعه S باشند، عملگر $*$ را روی $\cdot$ توزیع‌پذیر گوییم موقعی که:

$$x * (y \cdot z) = (x * y) \cdot (x * z)$$

باشد.

مثال جبری در این مورد میدان[3] است. میدان مجموعه‌ای از عناصر می‌باشد که همراه با دو عملگر دودویی، خواص ۱ تا ۵ را دارد و هر دو عملگر پس از ترکیب با یکدیگر خاصیت ۶ را نتیجه می‌دهند. مجموعه‌ای از اعداد حقیقی همراه با عملگرهای (+) و ($\cdot$) میدان اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهند. میدان اعداد حقیقی اساس محاسبات جبر معمولی است و عملگرها و اصول اولیه آن عبارتند از:

- عملگر دودویی (+) عمل جمع را تعریف می‌نماید.
- عنصر خنثی جمع، 0 است.
- معکوس جمع، تفریق می‌باشد.
- عملگر دودویی ($\cdot$) عمل ضرب را تعریف می‌نماید.
- عنصر خنثی ضرب 1 است.
- وارون ضرب برای عنصر a، تقسیم می‌باشد، چون $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ است.
- اصل توزیع‌پذیری ضرب روی جمع به‌صورت زیر است:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

۲ ـ ۲ ـ تعریف اصولی جبر بول

در سال ۱۸۵۴، آقای جورج بول[4]، روشی اصولی برای منطق معرفی و به این ترتیب سیستم جدید جبری را پایه‌ریزی نمود، که امروزه به جبر بول معروف است. در سال ۱۹۳۸ آقای شانن[5]، جبر بول دودویی را با نام جبر

1 - Inverse 2 - Distributive Law 3 - Field
4 - George Boole 5 - C.E. Shannon

سویچینگ[1] معرفی نمود و نشان داد که می‌توان خواص مدارهای سویچینگ الکتریکی دوحالته را، با این جبر بیان نمود. برای تعریف جبر بول، مطابق ذیل، اصولی را که بوسیله آقای هانتینگتون[2] در سال ۱۹۰۴ بیان شد، بکار می‌بریم.

جبر بول، یک ساختار جبری است که با عناصر مجموعه B، همراه با دو عملگر (+) و (۰) تعریف می‌شود به شرطی که **اصول زیر برای آن برقرار باشد.**

۱ ـ الف: مجموعه نسبت به عملگر (+) بسته باشد.

ب: مجموعه نسبت به عملگر (۰) بسته باشد.

۲ ـ الف: عنصر خنثی در مجموعه برای عملگر (+) برابر 0 باشد، به‌طوری که $x + 0 = 0 + x = x$

ب: عنصر خنثی در مجموعه برای عملگر (۰) برابر 1 باشد به‌طوری که $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

۳ ـ الف: مجموعه نسبت به عملگر (+) دارای خاصیت جابه‌جایی باشد به‌طوری که $x + y = y + x$

ب: مجموعه نسبت به عملگر (۰) دارای خاصیت جابه‌جایی باشد به‌طوری که $x \cdot y = y \cdot x$

۴ ـ الف: (۰) روی (+) توزیع‌پذیر باشد یعنی: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

ب: (+) روی (۰) توزیع‌پذیر باشد یعنی: $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

۵ ـ برای هر عنصر $x \in B$ یک عنصر $x' \in B$ (که x' مُکمل x نامیده می‌شود) وجود دارد، به‌طوری که الف: $x + x' = 1$ و ب: $xx' = 0$ باشد.

۶ ـ حداقل دو عنصر $x, y \in B$ وجود دارند، به‌طوری که $x \neq y$

از مقایسه جبر بول با ریاضیات و جبر معمولی (میدان اعداد حقیقی)، تفاوت‌های زیر را مشاهده می‌کنیم:

۱ ـ اصول هانتینگتون شامل اصل شرکت‌پذیری نیست. ولی این قانون برای جبر بول صادق است و می‌توان آنرا از اصول دیگر برای هر دو عملگر بدست آورد.

۲ ـ قانون توزیع‌پذیری (+) بر روی (۰) یعنی $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ تنها برای جبر بول صادق است.

۳ ـ جبر بول، معکوس جمع و معکوس ضرب ندارد، بنابراین عملگرهای تفریق و تقسیم وجود ندارد.

۴ ـ اصل ۵، عملگر مُکمل[3] نامیده می‌شود و در جبر معمولی وجود ندارد.

۵ ـ جبر معمولی با اعداد حقیقی کار می‌کند که تعداد نامتناهی از عناصر می‌باشد، در صورتی که جبر بول با مجموعهٔ B کار می‌کند که با 0 و 1 تعریف می‌شود.

جبر بول در بعضی موارد شبیه جبر معمولی است. استفاده از سمبول‌های + و ۰ در جبر بول برای راحتی کار کسانی است، که با جبر معمولی آشنا هستند. گرچه می‌توان بعضی قسمت‌های جبر معمولی را در جبر بول استفاده کرد، ولی افراد تازه کار باید دقت نمایند، تا از قوانینی که در جبر بول صادق نیستند، استفاده نکنند.

1 - Switching Algebra 2 - E.V. Huntington 3 - Complement

تشخیص بین عناصر مجموعه‌ای از یک ساختار جبری و متغیرهای جبری بسیار مهم است. **به‌عنوان مثال** عناصر میدان اعداد حقیقی، اعداد هستند، در صورتی که متغیرهایی نظیر a, b, c... در جبر معمولی سمبول‌هایی هستند که به جای اعداد حقیقی استفاده می‌شوند. به‌طور مشابه در جبر بول، مجموعه B، دارای متغیرهایی نظیر x, y, z... می‌باشد که این متغیرها صرفاً سمبول هستند. در این جا لازم به تذکر است که برای داشتن جبر بول باید:

۱ ـ عناصر یک مجموعه مشخص باشد.

۲ ـ قوانین عمل دو عملگر دودویی معین شود.

۳ ـ عناصر مجموعه B همراه با دو عملگر ذکر شده در شش اصل هانتینگتون صدق کنند.

البته می‌توان چندین فُرم جبر بول را، با توجه به انتخاب مجموعه B و قوانین حاکم بنا نمود. ما در این کتاب فقط از فُرم دو ارزشی جبر بول استفاده می‌کنیم، جبر بول دو ارزشی کاربردهایی در تئوری مجموعه‌ها و منطق دارد. هدف ما در این کتاب، کاربرد جبر بول در مدارهایی است که، در آنها از گیت‌های منطقی استفاده می‌شود.

جبر بول دو ارزشی:

جبر بول دو ارزشی بر روی مجموعهٔ دو عنصری $B = \{0, 1\}$ و با قوانینی برای دو عملگر (+) و (۰) مطابق جدول‌های ذیل تعریف می‌شود (قانون مُکمل، برای بررسی صحّت اصل ۵، در بخش قبلی است).

مکمل یا NOT

x	x'
0	1
1	0

OR

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

AND

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

این قوانین مانند عملگرهای AND، OR و NOT می‌باشند که در جدول (۱-۶) تعریف شده‌اند. حال باید ثابت کرد که اصل‌های هانتینگتون برای مجموعه $B = \{0, 1\}$ و دو عملگر دودویی تعریف شده در بالا، صادق است.

۱ ـ بسته بودن، از جدول‌های فوق واضح است، چون نتیجه هر عملگر 1 یا 0 می‌باشد که عنصری هستند متعلق به مجموعه B یا $0, 1 \in B$

۲ ـ از جدول‌ها ملاحظه می‌شود که:

الف: $0 + 0 = 0$ و $0 + 1 = 1 + 0 = 1$

ب: $1 \cdot 1 = 1$ و $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$

این روابط برطبق اصل ۲ بیانگر وجود عنصر خنثی 0 برای عملگر (+) و عنصر خنثی 1 جهت عملگر (·) است.

۳ ـ قانون جابه‌جایی: این قانون نیز با توجه به تقارن موجود در جدول‌ها روشن است.

۴ ـ الف: قانون توزیع‌پذیری یا عبارت $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ را می‌توان با استفاده از جدول عملگرها، برای تمام مقادیر x و y و z ثابت نمود. برای این کار مقدار دو عبارت $x \cdot (y + z)$ و $(x \cdot y) + (x \cdot z)$ را برای هر ترکیب x و y و z محاسبه و ملاحظه می‌کنیم به ازاء تمام مقادیر، دو عبارت مساوی می‌باشند (جدول ذیل).

x	y	z	$y + z$	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

ب: قانون توزیع‌پذیری (+) روی (·) را می‌توان با تشکیل جدول درستی با روشی مشابه ثابت نمود.

۵ ـ از جدول مُکمل، به آسانی دیده می‌شود که:

الف: $x + x' = 1$ است چون به ازاء $x = 0$ داریم: $0 + 0' = 0 + 1 = 1$ و به ازاء $x = 1$ داریم

$$1 + 1' = 1 + 0 = 1$$

ب: $x \cdot x' = 0$ است زیرا به ازاء $x = 0$ داریم: $0 \cdot 0' = 0 \cdot 1 = 0$ و به ازاء $x = 1$ داریم:

$$1 \cdot 1' = 1 \cdot 0 = 0$$

الف و ب اصل ۵ را ثابت می‌کنند.

۶ ـ اصل ششم هانتینگتون نیز صادق است، چون جبر بول دو ارزشی دارای دو مقدار 0 و 1 است که $0 \neq 1$ می‌باشد.

تا اینجا جبر بول دو ارزشی با عنصرهای 0 و 1 و عملگرهایی با قوانین مشابه AND، OR و NOT را بررسی کردیم. لذا جبر بول به‌صورت فُرم ریاضی تعریف و در بخش (۱-۹) نیز نشان داده شد که جبر بول معادل منطق دودویی است. کاربردهای عملی گیت‌های منطقی برای درک جبر بول بسیار مفید می‌باشد. از طرف دیگر روش ریاضی نیز، برای نتیجه‌گیری تئوری‌ها و خواص سیستم جبری لازم است. جبر بول دو ارزشی که در این بخش مورد بحث قرار گرفت، منطق دودویی یا جبر سویچینگ نیز نامیده می‌شود. برای راحتی کار از این به بعد، در این کتاب، به جای عبارت «جبر بول دو ارزشی» واژه «جبر بول» را بکار می‌بریم.

۲ ـ ۳ ـ قضیه‌ها یا تئوری‌های اصلی و خواص جبر بول

اصل دوگان[1]:

اصول هانتینگتون در قسمت‌های الف و ب بخش قبل به‌صورت جُفت، جُفت معرفی شدند. در این اصل‌ها، یک اصل را می‌توان با تعویض عملگرها و عنصرهای خنثی، از اصل دیگر بدست آورد. این خاصیت مهم در جبر بول به نام اصل دوگان معروف است و به این طریق تعریف می‌شود: هر عبارت جبری مُعتبر نتیجه شده از اصول جبر بول، با تعویض عملگرها و عناصر خنثی، باز هم مُعتبر می‌باشد. در جبر بول دو ارزشی، عناصر خنثی و خود عنصرهای مجموعه B، یکسان و برابر 0 و 1 می‌باشند. اصل دوگان، کاربردهای فراوان دارد، **به عنوان مثال** اگر دوگان یک عبارت جبری مورد نیاز باشد، کافیست فقط عملگرهای OR و AND تعویض و 1 ها به 0 و 0 ها به 1 تبدیل شوند.

تئوری‌های اساسی:

جدول (۲-۱) لیست شش تئوری و چهار اصل جبر بول را نشان می‌دهد. برای سادگی تا آنجا که اشتباه پیش نیاید، از علامت · صرفنظر شده است. تئوری‌ها و اصل‌های مذکور، اساسی‌ترین روابط جبر بول هستند که پیشنهاد می‌شود، خوانندگان محترم با این روابط آشنایی کامل پیدا نمایند. تئوری‌ها و اصل‌های مذکور به صورت جُفت نوشته شده‌اند، که می‌توان هر یک را، با اصل دوگان، از دیگری بدست آورد.

جدول (۲-۱)

اصل‌ها و تئوری‌های اساسی جبر بول

اصل ۲	الف:	$x + 0 = x$	ب: $x \cdot 1 = x$
اصل ۵	الف:	$x + x' = 1$	ب: $x \cdot x' = 0$
تئوری ۱	الف:	$x + x = x$	ب: $x \cdot x = x$
تئوری ۲	الف:	$x + 1 = 1$	ب: $x \cdot 0 = 0$
تئوری ۳		$(x')' = x$	
اصل ۳ جابه‌جایی	الف:	$x + y = y + x$	ب: $xy = yx$
تئوری ۴ شرکت‌پذیری	الف:	$x + (y + z) = (x + y) + z$	ب: $x(yz) = (xy)z$
اصل ۴ توزیع‌پذیری یا پخش	الف:	$x(y + z) = xy + xz$	ب: $x + yz = (x + y)(x + z)$
تئوری ۵ دمورگان[2]	الف:	$(x + y)' = x'y'$	ب: $(xy)' = x' + y'$
تئوری ۶ جذب[3]	الف:	$x + xy = x$	ب: $x(x + y) = x$

اصل‌ها در ساختار جبر بول بدیهی هستند و نیازی به اثبات ندارند، ولی تئوری‌ها باید با استفاده از اصل‌ها ثابت شوند. اثبات تئوری‌های یک متغیری در ذیل آورده شده و در طرف راست آن‌ها اصل‌های استفاده شده ذکر گردیده است.

1 - Duality　2 - DeMorgan　3 - Absorption

تئوری ۱ ـ الف $x + x = x$

با استفاده از اصل ۲ ـ ب	$x + x = (x + x)\cdot 1$
۵ ـ الف	$= (x + x)(x + x')$
۴ ـ ب	$= x + xx'$
۵ ـ ب	$= x + 0$
۲ ـ الف	$= x$

تئوری ۱ ـ ب $x \cdot x = x$

با استفاده از اصل ۲ ـ الف	$x \cdot x = xx + 0$
۵ ـ ب	$= xx + xx'$
۴ ـ الف	$= x(x + x')$
۵ ـ الف	$= x \cdot 1$
۲ ـ ب	$= x$

توجه کنید که تئوری ۱ ـ ب، دوگان تئوری ۱ ـ الف می‌باشد و هر مرحلهٔ اثبات تئوری ۱ ـ ب نیز، دوگان نظیر تئوری ۱ ـ الف است، به‌طور مشابه هر تئوری را می‌توان از اثبات تئوری نظیر جفت آن، با استفاده از اصل دوگان ثابت نمود.

تئوری ۲ ـ الف: $x + 1 = 1$

با استفاده از اصل ۲ ـ ب	$x + 1 = 1\cdot(x + 1)$
۵ ـ الف	$= (x + x')(x + 1)$
۴ ـ ب	$= x + x'\cdot 1$
۲ ـ ب	$= x + x'$
۵ ـ الف	$= 1$

تئوری ۲ ـ ب: طبق اصل دوگان $x \cdot 0 = 0$

تئوری ۳: $(x')' = x$: از اصل ۵ داریم $x + x' = 1$ و $x\cdot x' = 0$ که مُکمل x را تعریف می‌نماید. مُکمل x' برابر x و همچنین مساوی $(x')'$ می‌باشد و چون مُکمل منحصر بفرد است، پس $(x')' = x$ است.

تئوری‌های دو یا سه متغیری را، می‌توان با اصل‌ها و تئوری‌هایی که تاکنون مورد بحث قرار گرفتند، ثابت نمود. **به عنوان مثال** تئوری جذب را در نظر می‌گیریم.

تئوری ۶ ـ الف: $x + xy = x$

با استفاده از اصل ۲ ـ ب	$x + xy = x\cdot 1 + xy$
۴ ـ الف	$= x(1 + y)$
۳ ـ الف	$= x(y + 1)$
۲ ـ الف	$= x\cdot 1$
۲ ـ ب	$= x$

تئوری ۶ ـ ب: طبق اصل دوگان $x(x + y) = x$

تئوری‌های جبر بول را می‌توان با جدول درستی[1] نیز ثابت نمود. در جدول درستی به ازاء تمام ترکیبات متغیرها، دو طرف رابطه تئوری محاسبه می‌شوند، که باید دارای مقادیر یکسان باشند. جدول درستی زیر تئوری ۶ ـ الف را ثابت می‌نماید.

x	y	xy	$x + xy$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

اثبات جبری اصل شرکت‌پذیری و تئوری دمورگان طولانی است و در اینجا مورد بحث قرار نمی‌گیرد، ولی به آسانی می‌توان صحت آنها را، با جدول درستی ثابت نمود. **به عنوان مثال** جدول درستی برای صحت اولین **تئوری دمورگان** $(x + y)' = x'y'$ در ذیل آورده شده است.

x	y	$x+y$	$(x+y)'$	x'	y'	$x'y'$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

همان‌طور که از جدول فوق ملاحظه می‌شود، دو ستون $(x + y)'$ و $x'y'$ به ازاء تمام مقادیر y و x با هم برابر هستند، که دلیل صحت تئوری دمورگان می‌باشد.

1 - Truth Table

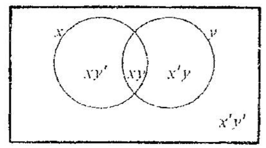
تقدم عملگرها:

در ارزیابی عبارت‌های جبری، حق تقدم به‌ترتیب با پرانتز، NOT، AND و OR می‌باشد. به این ترتیب ابتدا باید عبارت داخل پرانتز ارزیابی شود، سپس مُکمل‌ها و بالاخره AND و OR انجام شوند. **به عنوان مثال** جدول درستی قبل را برای تئوری دمورگان در نظر می‌گیریم. طرف چپ عبارت $(x + y)'$ است، لذا ابتدا عبارت داخل پرانتز محاسبه و سپس نتیجه حاصل، مُکمل می‌گردد. سمت راست عبارت نیز، برابر $x'y'$ می‌باشد که ابتدا باید مُکمل‌های x و y محاسبه و سپس نتایج در یکدیگر AND شوند. البته در جبر معمولی نیز همین روش وجود دارد (بجز مُکمل)، که ضرب و تقسیم به جای AND و OR بکار می‌روند.

دیاگرام وِن[1]:

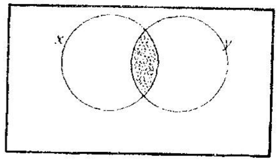
با دیاگرام وِن می‌توان رابطهٔ بین متغیرهای عبارت جبر بول را مجسم نمود. این دیاگرام شامل یک مستطیل می‌باشد (شکل ۲-۱)، که داخل آن دایره‌هایی قرار دارد که هر یک مربوط به یک متغیر می‌باشد. تمام نقاط داخل دایره را، مربوط به یک متغیر در نظر می‌گیریم و تمام نقاط خارج دایره مربوط به مُکمل متغیر مذکور می‌باشد. **به عنوان مثال** دایره‌ای که برای متغیر x می‌باشد را در نظر می‌گیریم. اگر داخل دایره مورد نظر باشد $x = 1$ و وقتی خارج دایره مد نظر باشد $x = 0$ است. دو دایره که همدیگر را قطع کرده‌اند، چهار ناحیه مجزا داخل مستطیل ایجاد نموده‌اند. ناحیه‌ای که متعلق به هیچیک از متغیرهای x و y نیست، ناحیه $x'y'$ می‌باشد. ناحیه داخل دایره y و خارج دایره x ناحیه $x'y$، ناحیه داخل دایره x و خارج دایره y ناحیه xy' است و بالاخره ناحیه‌ای که داخل هر دو دایره است، ناحیه xy می‌باشد.

دیاگرام وِن را می‌توان برای تشریح اصول اولیه جبر بول و اثبات تئوری‌ها به‌کار برد. **به عنوان مثال** در شکل (۲-۲) ناحیه‌ای که مربوط به xy است داخل دایره x می‌باشد، لذا از شکل مذکور ملاحظه می‌شود که $x + xy = x$ است.



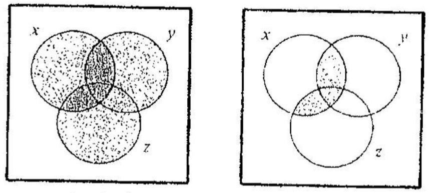
شکل (۲-۱)
دیاگرام وِن برای دو متغیر

1 - Venn Diagram



شکل (۲-۲)
دیاگرام وِن برای x = xy + x

شکل (۲-۳) اصل توزیع‌پذیری $x(y + z) = xy + xz$ را نشان می‌دهد.



$x(y + z)$ $xy + xz$

شکل (۲-۳)
دیاگرام وِن برای توصیف اصل توزیع‌پذیری

همان‌طور که در این دیاگرام ملاحظه می‌شود، سه دایره نظیر سه متغیر x و y و z، یکدیگر را قطع کرده‌اند و هشت ناحیه مجزا، برای سه متغیر، در دیاگرام وِن مشخص کرده‌اند. در این مثال خاص برای اصل توزیع‌پذیری، مشاهده می‌شود ناحیه قطع شده به وسیله دایره x با دایره‌های y یا z، با نواحی متعلق به xy یا xz، یکسان یا مساوی می‌باشند، لذا دو طرف اصل مذکور مساوی است، پس صحیح می‌باشد.

۲-۴-توابع بول

متغیرهای دودویی می‌توانند مقدار 0 یا 1 را داشته باشند. و یک تابع بول عبارتی جبری است که از متغیرهای دودویی، عملگرهای OR، AND، NOT و همچنین پرانتز و علامت مساوی، تشکیل می‌شود. برای یک مقدار مشخص متغیرها، تابع فقط می‌تواند مقدار 0 یا 1 داشته باشد. **به عنوان مثال** تابع بول:

$$F_1 = xyz'$$

را در نظر می‌گیریم. تابع F_1 برابر 1 است، به شرطی که $x = 1$ و $y = 1$ و همچنین $z' = 1$ باشد، در غیر این صورت $F_1 = 0$ است. عبارت فوق مثالی از یک تابع بول می‌باشد که به وسیله عبارت جبری نمایش داده شده است. چنین تابعی را می‌توان به وسیله جدول درستی نیز نشان داد. برای این کار در تابع با n متغیر، باید 2^n

ترکیب 0 و 1 در نظر گرفته و این متغیرها را در طرف چپ جدول درستی بنویسیم و مقدار 0 یا 1 تابع، نظیر این ترکیبات را، در ستون دیگر جدول درج نماییم. همان‌طوری که در جدول (۲-۲) نشان داده شده است، برای سه متغیر z و y و x، هشت ترکیب وجود دارد. و ستونی که زیر F_1 می‌باشد، مقدار تابع F_1 را نشان می‌دهد. تابع F_1 موقعی 1 است که $x = 1$ و $y = 1$ و $z = 0$ باشد، در غیر این صورت تابع F_1 مساوی 0 می‌باشد (توجه داشته باشید که $z' = 1$ معادل $z = 0$ است).

جدول (۲-۲)
جدول درستی برای توابع $F_1 = xyz'$, $F_2 = x + y'z$, $F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$, and $F_4 = xy' + x'z$

x	y	z	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

حال تابع $F_2 = x + y'z$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت $F_2 = 1$ است به شرطی که $x = 1$ یا $y = 0$ و $z = 1$ باشد. در جدول (۲-۲) در چهار سطر آخر $x = 1$ می‌باشد و در سطرهای 001 و 101 مقدار $yz = 01$ است، لذا برای پنج ترکیب متغیرهای z و y و x مقدار $F_2 = 1$ می‌باشد. **به‌عنوان مثال** سوم تابع

$$F_3 = x'y'z + x'yz + xy'$$

را بررسی می‌نمائیم.

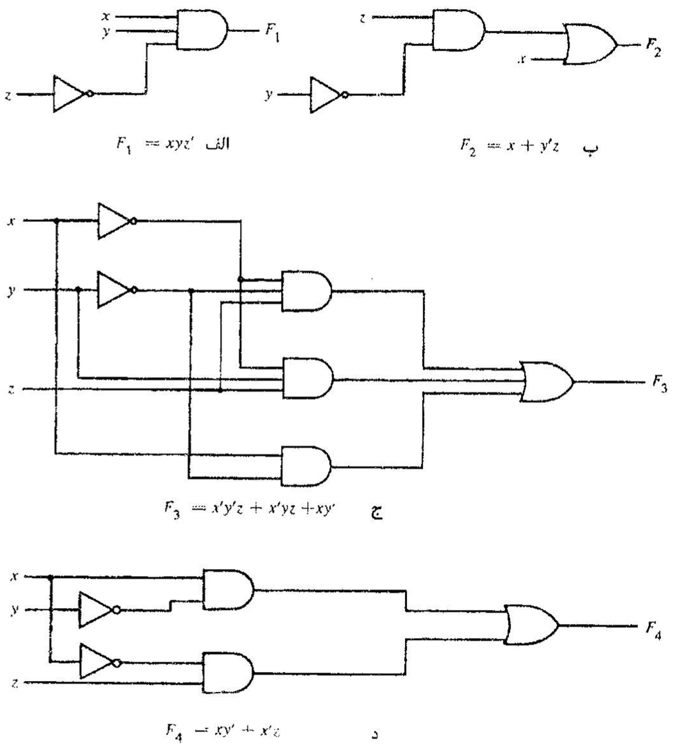
این تابع در جدول مذکور با چهار 1 و چهار 0 نشان داده شده است. تابع F_4 نیز مانند F_3 می‌باشد که در ذیل آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$F_4 = xy' + x'z$$

از جدول (۲-۲) ملاحظه می‌شود که تابع F_4 همان تابع F_3 است، چون به ازاء تمام ترکیبات سه متغیر، دارای مقدارهای مساوی 0 و 1 می‌باشند. به‌طور کلی دو تابع n متغیری را مساوی گوییم که اگر به ازاء تمام 2^n ترکیب از n متغیر، دارای مقدارهای مساوی باشند.

یک تابع بول ممکن است از عبارت جبری، به دیاگرامی متشکل از گیت‌های AND ، OR و NOT تبدیل شود. برای نمونه پیاده‌سازی چهار تابع که در بخش قبلی معرفی شد در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. در دیاگرام منطقی مذکور، در صورت نیاز هر متغیر، به وسیله معکوس‌کننده معکوس شده است (البته اگر مُکمل متغیرها وجود داشته باشد معکوس‌کننده لازم نیست). برای هر جمله تابع بول یک گیت AND و جهت ترکیب دو یا چند جمله، یک گیت OR لازم می‌باشد. از دیاگرام مذکور مشاهده می‌شود که تابع F_4 تعداد گیت

کمتری نسبت به تابع F_3 دارد. گرچه F_4 و F_3 توابع یکسانی هستند، ولی پیاده‌سازی F_4 اقتصادی‌تر است. ساده کردن توابع بول راهی برای بدست آوردن مدار ساده‌تر و اقتصادی‌تر برای تابع می‌باشد. البته بهترین فُرم تابع جبری بستگی به کاربرد بخصوص آن دارد. به هر حال در این بخش معیار مورد نظر ما، روش می‌نیمم کردن تابع می‌باشد.



شکل (۲-۴)
پیاده‌سازی توابع بول با گیت‌ها

عملیات جبری:

یک متغیر[1] ممکن است با پریم (مانند x') یا بدون پریم (مانند x) باشد. موقعی که تابع بول با گیت‌های منطقی پیاده‌سازی می‌شود، هر متغیر در تابع، به عنوان یک ورودی گیت محسوب و هر جمله منطقی نیز، با یک گیت

1. Literal

پیاده‌سازی می‌گردد. می‌نیمم کردن تعداد متغیرها و جمله‌ها، باعث کم شدن تعداد گیت‌ها، یا قطعات می‌شود. البته همیشه کم کردن هر دو با هم به‌طور همزمان امکان‌پذیر نیست و برای این کار معیارهای دیگری لازم است. در اینجا می‌نیمم کردن متغیرها را در نظر می‌گیریم و سایر روش‌ها را در فصل ۵ بررسی خواهیم کرد. با عملیات جبری می‌توان تعداد متغیرهای یک تابع را می‌نیمم کرد. ولی متأسفانه قانون بخصوصی که تضمین‌کننده فرم نهایی باشد وجود ندارد، تنها روش سعی در کاهش مدار، با استفاده از اصل‌های اولیه و تئوری‌های اساسی است که ضمن کار کردن با آنها، آشنایی لازم حاصل می‌شود. **مثال زیر** این موضوع را روشن می‌نماید.

مثال ۲-۱: توابع زیر را می‌نیمم کنید.

1. $x + x'y = (x + x')(x + y) = 1 \cdot (x + y) = x + y$
2. $x(x' + y) = xx' + xy = 0 + xy = xy$
3. $x'y'z + x'yz + xy' = x'z(y' + y) + xy' = x'z + xy'$
4. $xy + x'z + yz = xy + x'z + yz(x + x')$
   $= xy + x'z + xyz + x'yz$
   $= xy(1 + z) + x'z(1 + y)$
   $= xy + x'z$
5. $(x + y)(x' + z)(y + z) = (x + y)(x' + z)$ باتوجه به دوگان بودن تابع 4

توابع 1 و 2 دوگان یکدیگر هستند و در هر مرحله، عبارت دوگان آنها به‌کار برده شده است. جدول (۲-۲) نشان می‌دهد که تابع‌های 3 و 4 (F_4, F_3) مساوی یا هم‌ارز هستند. تابع 4 نشان می‌دهد که گاهی با اضافه کردن تعداد متغیرها عبارت ساده‌تر می‌شود. تابع 5 مستقیماً ساده نشده بلکه با تشکیل دوگان تابع 4 بدست آمده است.

مُکمل یک تابع:

مُکمل تابع F تابعی مانند F' است، که با تعویض 0 به 1 و 1 به 0، از تابع F بدست می‌آید. مُکمل یک تابع به‌صورت جبری، ممکن است با استفاده از تئوری دمورگان، نیز حاصل گردد. زوج تئوری‌های دمورگان برای دو متغیر در جدول (۲-۱) آورده شده است. تئوری‌های دمورگان را می‌توان برای سه متغیر یا بیشتر نیز به‌کار برد. تئوری اول دمورگان برای سه متغیر با استفاده از اصل‌ها و تئوری‌های جدول (۲-۱) در زیر آورده شده است.

با فرض	$B + C = X$	$(A + B + C)' = (A + X)'$
باتوجه به تئوری ۵ ـ الف دمورگان		$= A'X'$
با جایگزینی	$B + C = X$	$= A' \cdot (B + C)'$
باتوجه به تئوری ۵ ـ الف دمورگان		$= A' \cdot (B'C')$
باتوجه به تئوری ۴ ـ ب (شرکت‌پذیری)		$= A'B'C'$

تئوری‌های دمورگان برای هر تعداد متغیر، باید ابتدا به شکل دو متغیری درآید و سپس با جایگزین کردن‌های متوالی، مشابه فوق، نتیجه نهایی حاصل می‌گردد. این تئوری‌ها می‌توانند به‌صورت زیر عمومیت داده شوند.

$$(A + B + C + D + \cdots + F)' = A'B'C'D' \cdots F'$$
$$(ABCD \cdots F)' = A' + B' + C' + D' + \cdots + F'$$

فُرم کلی تئوری دمورگان بیان می‌نماید که مکمل یک تابع با تعویض AND به OR و مُکمل‌کردن متغیرها بدست می‌آید.

مثال ۲-۲: مُکمل توابع $F_1 = x'yz' + x'y'z$ و $F_2 = x(y'z' + yz)$ را پیدا کنید.

با به‌کار بردن تئوری دمورگان مُکمل‌ها مطابق زیر بدست می‌آیند.

$$F_1' = (x'yz' + x'y'z)' = (x'yz')'(x'y'z)' = (x + y' + z)(x + y + z')$$
$$F_2' = [x(y'z' + yz)]' = x' + (y'z' + yz)' = x' + (y'z')' \cdot (yz)'$$
$$= x' + (y + z)(y' + z')$$

روش ساده‌تر برای پیدا کردن مُکمل تابع این است که ابتدا دوگان تابع را در نظر گرفته و سپس هر متغیر را معکوس نمود، این روش از شکل عمومی تئوری دمورگان حاصل می‌شود. البته به‌خاطر داشته باشید که دوگان یک تابع با تعویض AND با OR و 1 با 0 بدست می‌آید.

مثال ۲-۳: در مثال ۲-۲ مُکمل توابع F_1 و F_2 را با بدست آوردن دوگان آنها و مُکمل کردن هر متغیر بدست آورید.

1. $F_1 = x'yz' + x'y'z.$
   دوگان تابع F_1 برابر است با: $(x' + y + z')(x' + y' + z).$
   پس از مُکمل‌کردن هر متغیر داریم: $(x + y' + z)(x + y + z') = F_1'$

2. $F_2 = x(y'z' + yz).$
   دوگان تابع F_2 برابر است با: $x + (y' + z')(y + z).$
   پس از مُکمل‌کردن هر متغیر داریم: $x' + (y + z)(y' + z') = F_2'$

۲ـ۶ـ سایر عملیات منطقی

موقعی که عملگرهای AND و OR بین متغیرهای x و y قرار می‌گیرند، به‌ترتیب دو تابع xy و $x + y$ را تولید می‌کنند. البته با n متغیر می‌توان 2^{2n} تابع تعریف نمود، که اگر $n = 2$ باشد، تعداد ۱۶ تابع بول خواهیم داشت و توابع AND و OR دو تابع، از این ۱۶ تابع می‌باشند. جدول درستی تابع F_0 تا F_{15}، نشانگر جدول درستی از تابع، برای دو متغیر مفروض است (جدول ۲-۷). توجه دارید که این توابع، با ۱۶ ترکیب مختلفی که می‌توان به تابع F نسبت داد بدست آمده‌اند. برخی از این توابع با یک سمبول عملگر نشان داده می‌شوند، **به عنوان مثال** F_1 جدول درستی برای تابع AND و F_7 جهت OR می‌باشد که سمبول‌های عملگر این توابع به‌ترتیب • و + هستند.

شانزده تابعی که در جدول درستی مذکور فهرست شده را، به‌صورت جبر بول نیز می‌توان بیان نمود. این توابع پس از ساده شدن در ستون اوّل جدول (۲-۸) آورده شده‌اند.

جدول (۲-۷)

جدول درستی ۱۶ تابع برای دو متغیر دودویی

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
سمبول عملگر		•		/		/		$\oplus$	+	$\downarrow$	$\odot$	'	$\subset$	'	$\supset$	$\uparrow$	

گرچه هر تابع را می‌توان به وسیله عملگرهای AND، OR و NOT بیان نمود، ولی عملگرهای دیگری نیز، برای بقیه توابع مذکور تعریف می‌شوند. سمبول این عملگرها، در ستون دوّم جدول (۲-۸) آورده شده‌اند ولی هیچکدام از سمبول‌های جدید، به استثناء "OR انحصاری[1] $\oplus$" توسط طراحان دیجیتال به‌کار برده نمی‌شوند.

هر یک از توابع فهرست شده در جدول (۲-۸) دارای نام و توضیحی است که کار تابع را، به نحوی شرح می‌دهد. شانزده تابع مذکور را می‌توان به سه دسته تقسیم نمود.

۱ـ دو تابع فقط 0 (تابع F_0) و فقط یک (تابع F_{15}) می‌باشند.

۲ـ چهار تابع، دارای یک عملگر مانند مُکمل و انتقال[2] اطلاعات هستند.

۳ـ ده تابع باقیمانده هشت عملیات مختلف: AND، OR، NAND، NOR، ENOR[3] (XNOR)، EOR (XOR)، نهی[4]* (xy') و استلزام[5]* $(x + y')$ می‌باشند.

عموماً توابع می‌توانند مساوی یک مقدار ثابت باشند ولی یک تابع دودویی فقط 1 یا 0 است. تابع مُکمل، مُکمل یک متغیر را تولید می‌کند. تابعی که برابر متغیر ورودی است تابع انتقال نامیده می‌شود، چون متغیر x یا y بدون این که مقدارش عوض شود، از گیت عبور می‌کند. دو عملگر نهی و استلزام بندرت در منطق کامپیوتر استفاده می‌شوند. عملگرهای AND و OR در ارتباط با تابع بول، قبلاً اشاره شد و بقیه چهار تابع به‌طور وسیع در طراحی سیستم‌های دیجیتال به‌کار برده می‌شوند.

تابع NOR مُکمل تابع OR و نام آن از کلمه NOT-OR گرفته شده است. به‌طور مشابه تابع NAND مُکمل تابع AND و نام آن از NOT-AND مشتق می‌شود. به همین ترتیب "OR انحصاری" که به‌صورت XOR یا EOR خلاصه می‌شود، شبیه تابع OR است، ولی برای موقعی که هر دو متغیر x و y با هم 1 می‌باشند، تابع XOR، 0 می‌باشد. تابع XNOR یا ENOR تابع هم‌ارزی[6] نیز نامیده می‌شود، زمانی برابر 1 است که هر دو متغیر مساوی باشند، یعنی موقعی که هر دو متغیر 0 یا هر دو 1 باشند. از جدول (۲-۷)

1 - Exclusive-OR (XOR یا EOR)

2 - Transfer

3 - Exclusive-NOR (XNOR یا ENOR)

4 - Inhibition

5 - Implication

6 - Equivalence

* بندرت استفاده می‌شوند.

جدول (۲-۸)
عبارت‌های بولی برای ۱۶ تابع دو متغیری

توابع بول	سمبول عملگر	نام	توضیحات
$F_0 = 0$		Null	Binary constant 0
$F_1 = xy$	$x \cdot y$	AND	x and y
$F_2 = xy'$	x/y	Inhibition	x but not y
$F_3 = x$		Transfer	x
$F_4 = x'y$	y/x	Inhibition	y but not x
$F_5 = y$		Transfer	y
$F_6 = xy' + x'y$	$x \oplus y$	Exclusive-OR	x or y but not both
$F_7 = x + y$	$x + y$	OR	x or y
$F_8 = (x + y)'$	$x \downarrow y$	NOR	Not-OR
$F_9 = xy + x'y'$	$x \odot y$	Equivalence	x equals y
$F_{10} = y'$	y'	Complement	Not y
$F_{11} = x + y'$	$x \subset y$	Implication	If y then x
$F_{12} = x'$	x'	Complement	Not x
$F_{13} = x' + y$	$x \supset y$	Implication	If x then y
$F_{14} = (xy)'$	$x \uparrow y$	NAND	Not-AND
$F_{15} = 1$		Identity	Binary constant 1

ملاحظه می‌شود که تابع OR انحصاری (F_6) و تابع هم‌ارزی (F_9) مُکمل یکدیگر هستند. به این دلیل تابع هم‌ارزی را تابع ENOR نیز می‌نامند.

جبر بول که در بخش (۲-۲) تعریف شد، دارای دو عملگر AND و OR و همچنین مُکمل (NOT) می‌باشد، که ما در این بخش تعدادی از عملگرهای دیگر را نیز تعریف نمودیم. علاوه بر این اصل‌های هانتینگتون بیانگر طبیعت دوگانی جبر بول برای عملگرهای + و $\cdot$ نسبت به یکدیگر می‌باشد.

۲-۷- گیت‌های منطقی دیجیتال

توابع بول به‌صورت جملاتی با عملگرهای AND، OR و NOT بیان می‌شوند، لذا پیاده‌سازی این توابع، با این نوع گیت‌ها آسان است. ساختن سایر گیت‌ها برای عملیات منطقی در عمل جالب می‌باشد. فاکتورهایی که برای ساختن گیت‌های دیگر باید در نظر گرفت عبارتند از (۱) قابلیت ساخت با قطعات فیزیکی و اقتصادی بودن ساخت آن (۲) امکان دارا بودن بیش از دو ورودی برای گیت (۳) دارابودن خواص اصلی عملگرهای دودویی، مانند جابه‌جایی و شرکت‌پذیری (۴) توانایی گیت برای پیاده‌سازی توابع منطقی، به‌طور مجزا و همراه با سایر گیت‌ها.

از شانزده تابعی که در جدول (۲-۸) تعریف شده، دو تای آنها برابر عدد ثابت و چهار تای دیگر دو بار تکرار

شده‌اند. بنابراین فقط ده تابع، باقی می‌مانند. دو تابع نهی و استلزام دارای خواص جابه‌جایی و شرکت‌پذیری نیستند، پس برای به‌کار بردن گیت‌های استاندارد، عملی نمی‌باشند. بقیه هشت تابع عبارتند از: مُکمل، انتقال، AND، OR، NAND، NOR، EOR و ENOR که به عنوان گیت‌های استاندارد در طراحی سیستم‌های دیجیتال به‌کار می‌روند.

سمبول‌های گرافیکی و جدول درستی هشت گیت مذکور در شکل (۲-۵) نشان داده شده‌اند. هر گیت دارای یک، یا دو متغیر ورودی x و y و یک خروجی F می‌باشد. مدارهای AND، OR و معکوس‌کننده در شکل (۱-۶) تعریف شده‌اند. مدار معکوس‌کننده وضعیت منطقی یک متغیر را معکوس می‌کند، در واقع تابع NOT، یا مُکمل را، تولید می‌کند. و دایره کوچک در خروجی سمبول گرافیکی معکوس‌کننده، نشانه مُکمل منطقی است. سمبول مثلث به تنهایی نمایش مدار بافر[1] است، بافر تابع انتقال را پیاده‌سازی می‌کند و عمل منطقی بخصوصی را انجام نمی‌دهد، چون مقدار دودویی خروجی مساوی ورودی است. بافر فقط برای تقویت توان سیگنال‌ها به‌کار برده می‌شود و معادل دو مدار متوالی معکوس‌کننده است.

تابع NAND، مُکمل تابع AND است و همان‌طوری که به وسیله سمبول گرافیکی نشان داده شده، متشکل از سمبول AND است که به دنبال آن، یک دایره کوچک قرار دارد. تابع NOR نیز مُکمل OR است و به وسیله سمبول OR با یک دایره کوچک در انتهای آن نمایش داده می‌شود. توابع NAND و NOR به‌طور وسیع به عنوان گیت‌های استاندارد به‌کار می‌روند. و در عمل بیش از AND و OR استفاده می‌شوند، چون گیت‌های NAND و NOR به‌سادگی با مدارهای ترانزیستوری ساخته می‌شوند و همچنین توابع بول، به راحتی با آنها پیاده‌سازی می‌شوند.

گیت EOR دارای سمبولی شبیه گیت OR است با این تفاوت که یک خط منحنی اضافی، در ورودی آن کشیده می‌شود. گیت ENOR یا هم‌ارزی مُکمل گیت EOR است و نمایش سمبولیک آن مانند EOR با یک دایره کوچک در خروجی آن است.

گسترش ورودی گیت‌ها:

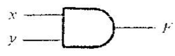
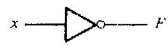
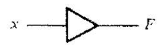
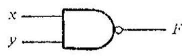
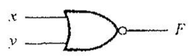
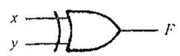
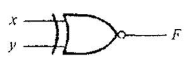
بجز معکوس‌کننده و بافر، تعداد ورودی گیت‌هایی که در شکل (۲-۵) نشان داده شده‌اند، در صورتی قابل افزایش است که برای گیت‌های مذکور دو اصل جابجایی و شرکت‌پذیری صادق باشد. توابع AND و OR که در جبر بول تعریف شدند، این دو خاصیت را دارند. برای تابع OR داریم:

جابه‌جایی $x + y = y + x$

شرکت‌پذیری $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$

این روابط نشان می‌دهد ورودی‌ها قابل تعویض هستند و بنابراین می‌توان ورودی‌های تابع OR را به سه متغیر یا بیشتر توسعه داد.

1 - Buffer

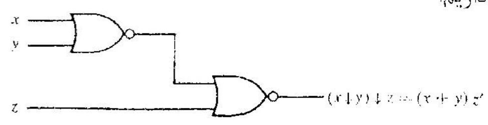
نام	سمبول گرافیکی	تابع جبری	جدول درستی
AND		$F = xy$	x y F 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OR		$F = x + y$	x y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
Inverter (NOT)		$F = x'$	x F 0 1 1 0
Buffer		$F = x$	x F 0 0 1 1
NAND		$F = (xy)'$	x y F 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NOR		$F = (x + y)'$	x y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
Exclusive-OR (XOR) (EOR)		$F = xy' + x'y = x \oplus y$	x y F 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
Exclusive-NOR or equivalence (ENOR)		$F = xy + x'y' = x \odot y$	x y F 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

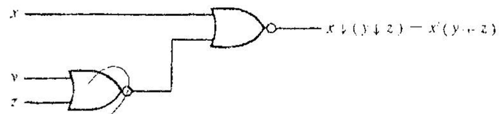
شکل (۲-۵)
گیت‌های منطقی دیجیتال

تابع‌های NAND و NOR خاصیت جابجایی دارند و تعداد ورودی‌های آنها می‌تواند بیشتر از دو باشد، به شرطی که تعریف تابع کمی تغییر کند. مُشکل این است که NAND و NOR شرکت‌پذیر نیستند. یعنی:

$$(x \downarrow y) \downarrow z \neq x \downarrow (y \downarrow z)$$
$$(x \downarrow y) \downarrow z = [(x + y)' + z]' = (x + y)z' = xz' + yz'$$
$$x \downarrow (y \downarrow z) = [x + (y + z)']' = x'(y + z) = x'y + x'z$$

و طبق شکل (۲-۶) داریم:





شکل (۲-۶)
نمایش شرکت‌پذیر نبودن NOR

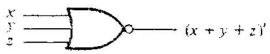
برای حل این مشکل، NOR (و NAND) چند ورودی را به عنوان مُکمل OR (و AND) تعریف می‌کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$x \downarrow y \downarrow z = (x + y + z)'$$
$$x \uparrow y \uparrow z = (xyz)'$$

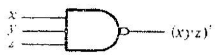
سمبول‌های گرافیکی برای گیت‌های سه ورودی در شکل (۲-۷) نشان داده شده‌اند. پرانتزها برای نوشتن عملیات متوالی NOR و NAND باید به فُرم صحیحی انتخاب شوند تا بیانگر ترتیب صحیح گیت‌ها باشند. برای روشن شدن مطلب شکل (۲-۷-ج) را در نظر می‌گیریم. تابع بول برای این مدار به شکل زیر است:

$$F = [(ABC)'(DE)']' = ABC + DE$$

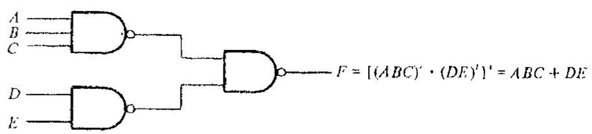
طرف راست عبارت فوق از تئوری دمورگان حاصل شده است. از روابط مذکور ملاحظه می‌شود که هر عبارت به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها را، با گیت‌های NAND نیز می‌توان پیاده‌سازی نمود. در مورد گیت‌های NAND و NOR در بخش‌های (۳-۶) (۴-۷) و (۴-۸) بیشتر بحث خواهد شد.



الف: گیت NOR سه ورودی



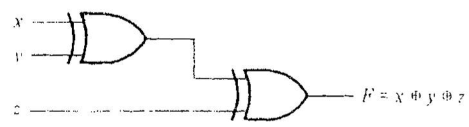
ب: گیت NAND سه ورودی



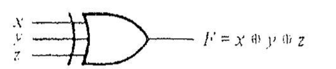
ج: گیت‌های متوالی NAND

شکل (۲-۷)
گیت‌های NOR و NAND چند ورودی

گیت‌های OR انحصاری (EOR) و هم‌ارزی (ENOR) هر دو دارای خواص جابجایی و شرکت‌پذیری هستند. لذا ورودی آنها قابل توسعه به بیشتر از دو می‌باشد. ولی از نظر سخت‌افزاری گیت چند ورودی EOR متداول نیست. گاهی حتی گیت EOR با دو ورودی نیز با سایر گیت‌ها ساخته می‌شود. علاوه بر این، تعریف این توابع، برای بیش از دو ورودی، نیاز به تصحیح دارد، به این معنی که تابع EOR یک تابع فرد است، یعنی زمانی برابر 1 می‌باشد که تعداد فردی از متغیرهای ورودی 1 باشد. گیت EOR سه ورودی (شکل (۲-۸-الف)) معمولاً با دو گیت دو ورودی متوالی پیاده‌سازی و به‌صورت گرافیکی با EOR سه ورودی مطابق شکل (۲-۸-ب)) نمایش داده می‌شود. جدول درستی شکل (۲-۸-ج)) به‌طور روشنی بیان می‌کند: تابع F زمانی برابر 1 است که فقط یک ورودی یا سه ورودی مساوی 1 باشد، به عبارت دیگر تعداد فردی از متغیرهای ورودی 1 باشند. بحث بیشتر راجع به گیت EOR را در بخش (۴-۹) می‌توان ملاحظه کرد.



الف: با گیت‌های دو ورودی



ب: گیت سه ورودی

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

ج: جدول درستی

شکل (۲-۸)
گیت EOR سه ورودی

۲

ساده‌سازی توابع بول

هدف: آشنایی با نقشه یا دیاگرام کارنو[1] و روش‌های دیگر برای ساده‌سازی توابع بول و پیاده‌سازی آن‌ها

چشم‌انداز این فصل

۱ـ روش دیاگرام یا نقشه[2]

۲ـ پیاده‌سازی تابع با گیت‌های NAND و NOR

۳ـ سایر پیاده‌سازی‌های توابع بول

۴ـ شرایط بی‌اهمیت[3]

۵ـ روش جدول‌بندی[4]

۶ـ نتیجه

۷ـ منابع

۸ـ تمرین

۹ـ حل چند تمرین نمونه

1 - Karnaugh Map
2 - Map Method
3 - Don't-Care Condition
4 - Tabulation Method

۲-۵- فُرم کانونیک یا متعارف و فُرم استاندارد

مینترم‌ها و ماکسترم‌ها:

متغیر دودویی ممکن است به وسیله فُرم معمولی x یا مُکمل آن یعنی x' ظاهر شود. حال فرض می‌کنیم دو متغیر دودویی x و y به وسیله عملگر AND با یکدیگر ترکیب شوند. چون هر متغیر ممکن است به هر یک از دو شکل فوق ظاهر شود، پس در این حالت چهار ترکیب یا چهار جمله $x'y'$، $x'y$، xy' و xy برای عملگر AND وجود دارد. هر یک از این چهار جمله یک ناحیه را در دیاگرام وِن شکل (۲-۱) نشان می‌دهد، که یک مینترم نامیده می‌شود. به‌طور مشابه با ترکیب n متغیر، 2^n مینترم خواهیم داشت که با روش شبیه جدول (۲-۳) می‌توان آنها را مشخص نمود. اعداد دودویی از 0 تا $2^n - 1$، با n متغیر، زیر ستون متغیرهای جدول نوشته می‌شوند. هر مینترم از اجرای عملگر AND بر روی n متغیر بدست می‌آید. به‌طوری که اگر هر بیت عدد دودویی 0 باشد، متغیر نظیر آن با پریم و در صورت 1 بودن، بدون پریم نشان داده می‌شود. هر مینترم نیز با سمبول m_j در جدول نشان داده می‌شود که j معادل دهدهی جمله مربوط به آن است.

جدول (۲-۳)
مینترم‌ها و ماکسترم‌ها برای سه متغیر دودویی

x	y	z	مینترم: جمله	مینترم: سمبول	ماکسترم: جمله	ماکسترم: سمبول
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

به‌طور مشابه n متغیر در یک جمله OR می‌توانند با پریم و یا بدون پریم باشند، که فُرم ماکسترم نامیده می‌شود. هشت ماکسترم‌های نظیر سه متغیر، همراه با فُرم سمبولیک آنها در جدول (۲-۳) نشان داده شده‌اند. 2^n جمله ماکسترم برای n متغیر را نیز، می‌توان به روش مشابهی تعیین نمود. هر ماکسترم به این طریق بدست می‌آید، که اگر بیت نظیر متغیر 0 باشد، متغیر بدون پریم و در صورت 1 بودن متغیر با پریم به‌صورت OR در ماکسترم نشان داده می‌شود. توجه دارید که ماکسترم مُکمل مینترم نظیر مربوطه به آن است و بالعکس.

تابع بول را می‌توان با استفاده از جدول درستی، با در نظر گرفتن مینترم‌هایی که تابع برای آنها 1 می‌باشد

و اجرای عملگر OR روی آنها به‌صورت جبری بیان نمود. **به عنوان مثال** تابع f_1 در جدول (۲-۴) به ازاء ترکیب متغیرها 001، 100 و 111 برابر 1 می‌باشد که به‌ترتیب به‌صورت $x'y'z$، $xy'z'$ و xyz بیان می‌شوند، پس داریم:

$$f_1 = x'y'z + xy'z' + xyz = m_1 + m_4 + m_7$$

به‌طور مشابه تابع f_2 به شکل:

$$f_2 = x'yz + xy'z + xyz' + xyz = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

است. این مثال‌ها یک خاصیت مهم جبر بول را نشان می‌دهد. یعنی هر تابع بول را می‌توان به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها[1] (کلمه مجموع در اینجا یعنی OR کردن مینترم‌ها) یا مجموعی از مینترم‌ها نشان داد، که آن را فُرم کانونیک تابع به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها نامند.

جدول (۲-۴)
توابع سه متغیری

x	y	z	تابع f_1	تابع f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

مُکمل تابع بول، از OR کردن مینترم‌هایی که تابع به ازاء آنها در جدول درستی برابر 0 است، تشکیل می‌شود. لذا مُکمل f_1 برابر زیر می‌باشد.

$$f_1' = x'y'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz'$$

حال اگر مُکمل f_1' را حساب کنیم، خود تابع f_1 به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$f_1 = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$$
$$= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6$$

به‌طور مشابه تابع f_2 با توجه به جدول مذکور به شکل زیر می‌باشد:

$$f_2 = (x + y + z)(x + y + z')(x + y' + z)(x' + y + z)$$
$$= M_0M_1M_2M_4$$

1 - Sum of Products

مثال‌های فوق، دومین خاصیت مهم جبر بول را نشان می‌دهد، یعنی هر تابع بول را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب (حاصل‌ضرب به معنی اعمال عملگر AND می‌باشد) ماکسترم‌ها بیان نمود. روش مستقیم بدست آوردن حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها، از جدول درستی، به این صورت است که: برای هر ترکیبی از متغیرها که تابع به ازاء آنها در جدول درستی 0 است، یک ماکسترم از ترکیب متغیرها تشکیل و سپس تمام آنها را AND می‌کنیم. توابع f_1 و f_2 به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها[1] یا حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها بیان شده‌اند که آنها را فُرم کانونیک تابع به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها نامند.

مجموع مینترم‌ها:

همان‌طوری که قبلاً بیان شد، برای n متغیر دودویی، 2^n مینترم مجزا داریم و هر تابع منطقی با مجموع مینترم‌هایی که تابع به ازاء آنها برابر 1 است، بیان می‌شود. گاهی مناسب‌تر است که تابع بول به‌صورت مجموع مینترم‌های آن نمایش داده شود. در صورتی که تابع به این شکل نباشد، ابتدا مجموع جملات AND شده را بدست می‌آوریم، سپس هر جمله را، بررسی می‌کنیم که آیا تمام متغیرها در آن وجود دارد؟ اگر یک یا چند متغیر در یک جمله نباشد، آن جمله با عبارتی شبیه $x + x'$ (برای متغیر x که در جمله نیست) AND می‌شود. **مثال زیر** این موضوع را روشن می‌نماید.

مثال ۲-۴: تابع $F = A + B'C$ را به‌صورت مجموعی از مینترم‌ها بیان نمایید.

تابع دارای سه متغیر C و B و A است. اولین جمله A در تابع، دو متغیر B و C را ندارد. بنابراین ابتدا آن را در $(B + B')$ ضرب می‌کنیم:

$$A = A(B + B') = AB + AB'$$

چون جملهٔ اول متغیر C را نیز ندارد، حاصل را در $(C + C')$ ضرب می‌کنیم.

$$A = AB(C + C') + AB'(C + C')$$
$$= ABC + ABC' + AB'C + AB'C'$$

جمله دوم تابع یعنی $B'C$ متغیر A را ندارد، لذا آن را در $A + A'$ ضرب می‌کنیم:

$$B'C = B'C(A + A') = AB'C + A'B'C$$

با ترکیب تمام جملات فوق، تابع F برابر است با:

$$F = A + B'C$$
$$= ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C$$

اما جمله $AB'C$ در تابع مذکور دو بار تکرار شده و طبق تئوری 1، $x + x = x$ است، پس یکی از آنها را

1 - Product of Sums

حذف می‌کنیم. حال اگر تابع F را به‌طور مرتب، به‌صورت صعودی، برحسب شماره مینترم‌ها بنویسیم، چنین نتیجه می‌شود:

$$F = A'B'C + AB'C' + AB'C + ABC' + ABC$$
$$= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

گاهی مناسب‌تر است که تابع F را به‌صورت خلاصه زیر نشان داد:

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

در عبارت فوق سمبول Σ یعنی اعمال عملگر OR، و اعداد داخل پرانتز، شماره مینترم‌ها می‌باشند و حروف داخل پرانتز، لیست متغیرهای به‌کار رفته، در تشکیل جملات مینترم است.

راه دیگر برای بدست آوردن مینترم‌های تابع بول، بدست آوردن مستقیم جدول درستی تابع، از عبارت جبری است تا بتوان مینترم‌ها را از جدول درستی خواند. **به عنوان مثال** تابع مثال ۲-۴ را در نظر می‌گیریم:

$$F = A + B'C$$

جدول درستی (۲-۵) برای تابع F، با هشت ترکیب متغیرهای A و B و C به این طریق حاصل می‌شود که، اگر $A = 1$ یا $BC = 01$ بود، مقدار تابع را مساوی 1 قرار می‌دهیم. از جدول درستی مذکور مینترم‌های 1 و 4 و 5 و 6 و 7 تابع خوانده می‌شوند.

جدول (۲-۵)

جدول درستی تابع $F = A + B'C$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها:

تابع بول n متغیری را، می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها نیز نمایش داد. برای این کار، ابتدا باید تابع را به‌صورت جمله‌های OR در آوریم. لذا از اصل توزیع‌پذیری مانند $x + yz = (x + y)(x + z)$ استفاده می‌نماییم. سپس اگر متغیری مانند x در یک جمله OR وجود نداشت، آن جمله را با xx'، OR می‌کنیم. این روش با **مثال زیر** واضح‌تر می‌شود.

مثال ۲-۵: تابع بول $F = xy + x'z$ را به‌صورت حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها درآورید.

ابتدا تابع را با استفاده از اصل توزیع‌پذیری به شکل جملات OR در می‌آوریم.

$$F = xy + x'z = (xy + x')(xy + z)$$
$$= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z)$$
$$= (x' + y)(x + z)(y + z)$$

این تابع دارای سه متغیر x و y و z است، ولی هر جمله OR یک متغیر کم دارد. لذا طبق ذیل عمل می‌نماییم.

$$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$$
$$x + z = x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z)$$
$$y + z = y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z)$$

با ترکیب تمام‌عبارات فوق وحذف جملاتی که بیش از یک‌بار تکرارشده، درنهایت تابع F به‌شکل زیر در می‌آید:

$$F = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$$
$$= M_0M_2M_4M_5$$

راه مناسب‌تر برای نمایش تابع به‌صورت زیر می‌باشد:

$$F(x, y, z) = \Pi(0, 2, 4, 5)$$

سمبول حاصل‌ضرب Π، بیانگر حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها و اعداد داخل پرانتز شماره ماکسترم‌ها می‌باشند.

تبدیل فُرم‌های کانونیک یا متعارف به یکدیگر:

تابعی که به‌صورت مجموع مینترم‌ها بیان شده باشد، مُکمل آن، برابر با مجموع مینترم‌هایی است که در فُرم اصلی تابع وجود ندارد. چون تابع اصلی برابر مجموع مینترم‌هایی است که تابع به ازاء آنها برابر 1 می‌باشد، پس مُکمل آن، برابر مجموع مینترم‌هایی است که تابع به ازاء آنها مساوی 0 می‌باشد. **به عنوان مثال** تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 4, 5, 6, 7)$$

این تابع دارای مُکملی مانند F' است که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$F'(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 3) = m_0 + m_2 + m_3$$

که مینترم‌های 3 ,2 ,0 در تابع اصلی F وجود ندارد. حال اگر با استفاده از تئوری دمورگان از تابع F' مُکمل بگیریم، خود تابع F به شکل دیگری مانند زیر بدست می‌آید:

$$F = (m_0 + m_2 + m_3)' = m_0' \cdot m_2' \cdot m_3' = M_0M_2M_3 = \Pi(0, 2, 3)$$

عبارت فوق با تعریف مینترم و ماکسترم جدول (۲-۳) حاصل می‌شود. از جدول درستی مذکور و تئوری دمورگان مشاهده می‌شود که:

$$m_j' = M_j$$

یعنی جمله ماکسترم با اندیس j، مُکمل جمله مینترم با همان اندیس می‌باشد و بالعکس. مثال اخیر تابع را به‌صورت مجموعی از مینترم‌ها و معادل آن، به‌صورت حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها نشان می‌دهد. با استدلال مشابه می‌توان حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها را نیز به مجموع مینترم‌ها تبدیل نمود. با توجه به مطالب فوق روش کلی برای تبدیل یک فُرم کانونیک به فُرم دیگر، با تعویض علامت‌های Σ با Π و نوشتن آن شماره‌هایی که در فُرم اصلی تابع وجود ندارد، بدست می‌آید. و چون تعداد کل مینترم‌ها یا ماکسترم‌ها برای n متغیر، مساوی 2^n می‌باشد، لذا به آسانی مینترم‌هایی که در تابع وجود ندارد، مشخص می‌گردند. می‌توان تابع بول را با استفاده از جدول درستی، یا روش تبدیل فُرم‌های کانونیک به یکدیگر، از فُرم جبری، به‌صورت حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها درآورد. **به عنوان مثال** تابع بول مثال (۲-۵) را در نظر می‌گیریم.

$$F = xy + x'z$$

ابتدا جدول درستی تابع را مانند جدول (۲-۶) بدست می‌آوریم:

جدول (۲-۶)

جدول درستی تابع $F = xy = x'z$

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

در جدول مذکور تابع F به ازاء $xy = 11$ و $x'z = 01$ برابر 1 می‌باشد که زیر ستون تابع F درج گردیده است. به این ترتیب از جدول، مینترم‌های تابع برابر 1 و 3 و 6 و 7 می‌باشد، لذا تابع به‌صورت مجموع مینترم‌ها به شکل زیر است:

$$F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 6, 7)$$

چون تابع سه متغیری است، لذا جمعاً دارای هشت مینترم و ماکسترم می‌باشد و شماره‌هایی که در تابع فوق وجود ندارد، عبارتند از 0 و 2 و 4 و 5. لذا تابع به‌صورت حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها به شکل:

$$F(x, y, z) = \Pi(0, 2, 4, 5)$$

می‌باشد و این همان جوابی است که قبلاً در مثال (۲-۵) بدست آوردیم.

فُرم‌های استاندارد:

دو فُرم کانونیک، فُرم‌های اولیه‌ای هستند که می‌توان آنها را از جدول درستی بدست آورد. این فُرم‌ها دارای کمترین تعداد متغیر نیستند، چون هر مینترم یا ماکسترم، طبق تعریف باید شامل تمام متغیرها، یا مُکمل

۳-۱- روش دیاگرام یا نقشه

پیچیدگی گیت‌های دیجیتال، برای پیاده‌سازی توابع بول، به‌طور مستقیم به عبارت جبری تابع بستگی دارد. گرچه تابع بول دارای یک جدول درستی واحد است، ولی به صور مختلف جبری می‌تواند بیان شود. تابع بول را، با روابط جبری مطابق آنچه که در بخش (۲-۴) بحث شد، می‌توان ساده نمود، ولی این روش ساده کردن تابع، مشکل و قانون بخصوصی برای ساده کردن ندارد. روش نقشه، یک روش مناسب‌تر جهت ساده‌سازی توابع بول است. این روش ممکن است، به‌صورت تصویری از جدول درستی و یا فُرم توسعه یافته دیاگرام وِن در نظر گرفته شود. روش دیاگرام را اولین بار آقای وچ[1] پیشنهاد کرد و سپس بوسیله آقای کارنو[2] اصلاح شد، که امروزه به دیاگرام وچ یا نقشه کارنو معروف است.

نقشه کارنو، دیاگرامی از مربع‌هاست، که هر مربع، یک مینترم را نمایش می‌دهد. چون تابع بول را به‌صورت مجموعی از مینترم‌ها می‌توان نمایش داد، لذا تابع را، با در نظرگرفتن نواحی اشغال شده بوسیله مربع‌هایی در نقشه که مینترم نظیر آن‌ها در تابع وجود دارد، می‌توان مشخص نمود. در حقیقت نقشه، دیاگرام تصویری از تمام حالاتی است، که یک تابع بول به‌صورت استاندارد می‌تواند بیان شود. با بررسی نمونه‌های مختلف، استفاده‌کننده می‌تواند عبارات جبری معادل، ولی متفاوتی برای یک تابع واحد بدست آورد و از بین آن‌ها ساده‌ترین را انتخاب نماید. ما فرض می‌کنیم، که ساده‌ترین عبارت جبری تابع به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها یا حاصل‌ضرب مجموع‌ها، آن عبارتی است که دارای حداقل متغیر است (البته این عبارت الزاماً عبارت منحصر به فردی نیست).

۳-۲- نقشه‌های دو و سه متغیره

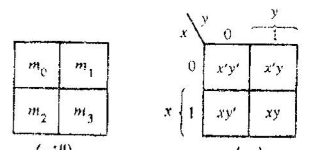
یک نقشه دو متغیره در شکل (۳-۱- الف) نشان داده شده است، که دارای چهار مینترم برای دو متغیر می‌باشد. بنابراین نقشه چهار مربع دارد که هر مربع نظیر یک مینترم است. برای نشان دادن ارتباط بین مربع‌ها و دو متغیر، نقشه مذکور در شکل (ب) دوباره رسم شده است. 0 ها و 1 هایی که برای هر سطر و ستون گذاشته شده، مشخص‌کننده مقادیر x و y می‌باشد. توجه کنید که x در سطر 0، با پریم و در سطر 1 بدون پریم است. به‌طور مشابه y در ستون 0 با پریم و در ستون 1 بدون پریم می‌باشد.

اگر مربعی که مینترم نظیر آن مربوط به تابع است را، با علامتی مشخص کنیم، در این صورت نقشه دو متغیره، روش مفیدی برای نمایش یکی از ۱۶ تابع دو متغیری می‌گردد. **به عنوان مثال** تابع xy را در نظر می‌گیریم، چون این تابع برابر مینترم m_3 است، لذا در مربع m_3 مقدار 1 گذارده می‌شود (شکل ۳-۲- الف). به‌طور مشابه تابع $x + y$ در نقشه با سه عدد 1 داخل مربع‌ها نمایش داده شده است (شکل ۳-۲-ب)، که این مربع‌ها نظیر مینترم‌های زیر می‌باشند:

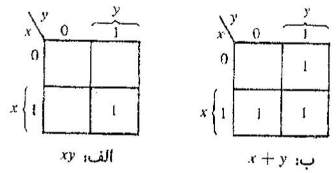
1 - Veitch　　2 - Karnaugh

$$x + y = x'y + xy' + xy = m_1 + m_2 + m_3$$

البته سه مربع مذکور می‌تواند از ناحیه متغیر x در سطر دوم، متغیر y در ستون دوم، که ناحیه متعلق به x و y را در بر می‌گیرد بدست آید.



شکل (۳-۱)
نقشه دو متغیره



شکل (۳-۲)
نمایش توابع در نقشه

یک نقشه سه متغیره در شکل (۳-۳) نشان داده شده است، که دارای هشت مینترم برای سه متغیر دودویی می‌باشد. بنابراین نقشه هشت مربع دارد که هر مربع نظیر یک مینترم است. توجه کنید که مینترم‌ها به ترتیب دودویی مرتب نشده‌اند، بلکه به ترتیب گِدگری می‌باشند (جدول ۱-۴). در این صورت از هر مربع به مربع دیگر فقط یک بیت از 1 به 0 یا از 0 به 1 تغییر می‌کند. در نقشه‌ای که در قسمت (ب) کشیده شده، هر ستون و هر سطر با اعداد دودویی علامت گذاری شده، که ارتباط بین مربع‌ها و سه متغیر را نشان می‌دهد. **به عنوان مثال** مربعی که به m_5 نسبت داده شده، مربوط به سطر 1 و ستون 01 می‌باشد. موقعی که این دو عدد پهلوی هم قرار داده شوند عدد دودویی 101 را نشان می‌دهد که نظیر عدد 5 دهدهی است. راه دیگر برای بررسی مربع $m_5 = xy'z$ این است که این مربع در سطر مربوط به x و ستون متعلق به $y'z$ (ستون 01) می‌باشد. توجه کنید که برای چهار مربع، مقدار متغیر برابر 1 و جهت چهار مربع دیگر، مساوی 0 می‌باشد. برای آن مربع‌هایی که متغیر مساوی 1 است، متغیر بدون پریم و جهت مربع‌هایی که 0 است، متغیر با پریم می‌باشد. برای راحتی کار، در نقشه نام متغیر را، برای چهار مربعی می‌نویسیم که متغیر پریم ندارد (شکل ۳-۳- ب).

برای درک مفید بودن نقشه جهت ساده کردن توابع بول، باید خاصیت دو مربع همجوار را بررسی نماییم. تنها اختلاف بین هر دو مربع همجوار در نقشه این است که، در یک مربع متغیر بدون پریم و در مربع دیگر با پریم می‌باشد. **به عنوان مثال** m_5 و m_7 در دو مربع همجوار هستند، که متغیر y در m_5 با پریم و در m_7 بدون پریم است، در حالی که دو متغیر دیگر در هر دو مربع یکسان می‌باشند. از اصول جبر بول نتیجه می‌شود که

مجموع دو مینترم در دو مربع همجوار را، به یک جمله AND با دو متغیر می‌توان ساده نمود. برای روشن شدن مطلب، مجموع دو مینترم در دو مربع همجوار مانند m_5 و m_7 را در نظر می‌گیریم:

$$m_5 + m_7 = xy'z + xyz = xz(y' + y) = xz$$

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

(الف)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

(ب)

شکل (۳-۳- الف)
نقشه سه متغیره

در اینجا دو مربع یا دو مینترم، در متغیر y اختلاف دارند که به هنگام جمع دو مینترم می‌توان آن را حذف کرد. لذا هر دو مینترم در مربع‌های همجوار با هم OR می‌شوند و باعث حذف متغیری می‌گردند که در آن دو مینترم متفاوت است. **مثال زیر** روش ساده کردن تابع بول، با نقشه را نشان می‌دهد.

مثال ۳-۱: تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(x, y, z) = \Sigma(2, 3, 4, 5)$$

ابتدا برای مربع‌هایی که مینترم آن‌ها در تابع وجود دارد، 1 در نقشه می‌گذاریم، لذا در مربع‌های نظیر مینترم‌های 010، 011، 100 و 101 در نقشه شکل (۳-۴) مقدار 1 گذارده شده است. مرحله بعد پیدا کردن مربع‌های همجوار حاوی 1 می‌باشد، این کار در شکل مذکور با دو مستطیل نشان داده شده است که هر یک دو تا 1 دارند. مستطیل بالایی سمت راست، ناحیهٔ زیرپوشش جمله $x'y$ را پوشش می‌دهد، چون دو مربع داخل مستطیل، در سطر 0 نظیر x' و همچنین در دو ستون آخر نظیر y قرار دارند. به‌طور مشابه مستطیل سمت چپ پایین با جمله xy' نشان داده می‌شود (چون سطر دوّم نشان‌دهنده x و دو ستون سمت چپ نیز y' را نشان می‌دهد). مجموع این جمله‌ها عبارت ساده شده تابع F را به شکل زیر نتیجه می‌دهد.

$$F = x'y + xy'$$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		

شکل (۳-۴)
نقشه تابع مثال (۳-۱): $F(x, y, z) = \Sigma\ (2, 3, 4, 5) = x'y + xy'$

در بعضی حالات مربع‌ها در نقشه می‌توانند همجوار تلقی شوند، ولی به هم چسبیده نباشند. **به عنوان مثال** در شکل (۳-۳)، m_0 همجوار m_2 و m_4 همجوار m_6 می‌باشند، چون مینترم آن‌ها فقط در یک متغیر اختلاف دارند. این موضوع با روابط جبری زیر قابل اثبات است.

$$m_0 + m_2 = x'y'z' + x'yz' = x'z'(y' + y) = x'z'$$
$$m_4 + m_6 = xy'z' + xyz' = xz'(y' + y) = xz'$$

بنابراین اگر نقشه را از دو طرف چپ و راست بهم بچسبانیم، در این صورت این مربع‌ها همجوار می‌شوند و مینترم نظیر آن‌ها را می‌توان ساده نمود.

مثال ۳-۲: تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(x, y, z) = \Sigma(3, 4, 6, 7)$$

نقشه تابع در شکل (۳-۵) نشان داده شده است.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	
1	1		1	1

شکل (۳-۵)
نقشه تابع مثال (۳-۲): $F(x, y, z) = \Sigma\ (3, 4, 6, 7) = yz + xz'$

در نقشه چهار مربع نظیر چهار مینترم تابع، 1 گذارده شده است. دو مربع همجوار در ستون سوم با هم ترکیب می‌شوند که یک جمله دو متغیری yz حاصل می‌شود. دو مربع باقیمانده شامل 1، که با دو نیمه مستطیل نشان داده شده‌اند نیز، مطابق بحث انتهای مثال (۳-۱) همجوار هستند. با ترکیب این دو مربع، جمله دو متغیره xz' حاصل می‌شود. لذا شکل ساده شده تابع برابر می‌شود با:

$$F = yz + xz'$$

حال ترکیب چهار مربع همجوار را، در نقشه سه متغیری بررسی می‌کنیم. این ترکیب مجموع چهار مینترم است که حاصل آن‌ها فقط با یک عبارت یک متغیره نمایش داده می‌شود، **به عنوان مثال** مجموع چهار مینترم همجوار 0 و 2 و 4 و 6 به یک جمله با متغیر z' تبدیل می‌گردد مانند:

$$m_0 + m_2 + m_4 + m_6 = x'y'z' + x'yz' + xy'z' + xyz'$$
$$= x'z'(y' + y) + xz'(y' + y)$$
$$= x'z' + xz' = z'(x' + x) = z'$$

تعداد مربع‌های همجواری که ممکن است با هم ترکیب شوند، همیشه توانی از 2 مانند 1 و 2 و 4 و 8 و ...

می‌باشند. هر چه تعداد بیشتری از مربع‌های همجوار با هم ترکیب شوند، جمله حاصل‌ضرب را، با تعداد کمتری از متغیر بدست می‌آوریم. به این ترتیب:

الف ـ یک مربع، نظیر یک مینترم، با یک جمله سه متغیری نمایش داده می‌شود.

ب ـ دو مربع همجوار، با یک جمله دو متغیری نشان داده می‌شود.

ج ـ چهار مربع همجوار، با یک جمله یک متغیری نمایش داده می‌شود.

د ـ تمام مربع‌های یک نقشه (در این حالت هشت مربع) تولید تابعی می‌کند، که همواره برابر 1 است.

مثال ۳-۳: تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(x, y, z) = \Sigma(0, 2, 4, 5, 6)$$

نقشه تابع F در شکل (۳-۶) نشان داده شده است.

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1			1
1	1	1		1

شکل (۳-۶)

نقشه تابع مثال (۳-۳): $F(x, y, z) = \Sigma\ (0, 2, 4, 5, 6) = z' + xy'$

ابتدا چهار مربع همجوار در اولین و آخرین ستون را، با هم ترکیب می‌کنیم که جمله یک متغیری z' حاصل می‌شود. تنها مربع باقیمانده تابع، مینترم 5 (مینترم سه متغیری $xy'z$) است که با مربع همجوار آن ترکیب می‌کنیم (البته این مربع یک‌بار استفاده شده که این مطلب نه تنها مجاز است، بلکه مفید نیز می‌باشد) در این صورت از دو مربع همجوار مذکور، جمله دومتغیری xy' حاصل می‌گردد. لذا شکل ساده شده تابع عبارتست از:

$$F = z' + xy'$$

اگر در حالتی تابع به‌صورت مجموع مینترم‌ها بیان نشده باشد، در این صورت برای تهیه مینترم‌ها از نقشه می‌توان استفاده نمود، سپس تابع را به عبارتی با حداقل جمله بیان کرد.

اصولاً عبارت جبری حتماً باید به‌صورت مجموعی از حاصل‌ضرب‌ها بیان شود. هر جمله حاصل‌ضرب نیز با یک، دو، یا تعداد بیشتری مربع، در نقشه می‌تواند نشان داده شود. در این صورت مینترم‌های تابع به‌طور مستقیم از نقشه خوانده می‌شوند.

مثال ۳-۴: با داشتن تابع بول زیر:

$$F = A'C + A'B + AB'C + BC$$

الف ـ آن را به‌صورت مجموع مینترم‌ها بیان نمایید.

ب ـ تابع ساده شده را به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها بدست آورید.

دو مربع نظیر جمله $A'C$ در شکل (۳-۷) از محل تلاقی A' (اولین سطر) و C (دو ستون وسط) حاصل می‌شود، که مربع‌های نظیر 001 و 011 می‌باشند. توجه کنید موقعی که 1 را در مربع‌ها قرار می‌دهیم، ممکن است به مربعی برخورد کنیم که توسط جمله قبلی در آن 1 گذارده شده است. این موضوع برای دومین جمله $A'B$ اتفاق می‌افتد. چون این جمله در مربع‌های 011 و 010 دارای مقدار 1 است، ولی مربع نظیر 011 با اولین جمله $A'C$ مشترک می‌باشد، لذا فقط یک 1 جدید برای جمله $A'B$ در مربع 010 قرار داده می‌شود. همین روش را ادامه می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که جمله $AB'C$ مربوط به مربع 101 نظیر مینترم 5 است و بالاخره جمله BC شامل دو 1 در مربع‌های 011 و 111 می‌باشد. به این ترتیب تابع مذکور دارای پنج مینترم نظیر پنج 1 است که در نقشه (۳-۷) نشان داده شده‌اند.

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		1	1	1
1		1	1	

شکل (۳-۷)

نقشه مثال (۳-۴): $A'C + A'B + AB'C + BC = C + A'B$

بنابراین مینترم‌های 1 و 2 و 3 و 5 و 7 مستقیماً از نقشه خوانده می‌شوند. و تابع به‌صورت مجموع مینترم‌های زیر نشان داده می‌شود.

$$F(A, B, C) = \Sigma\ (1, 2, 3, 5, 7)$$

فرم تابع به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها، در تابع اولیه بیان شده، ولی دارای جمله‌های زیادی است که با استفاده از نقشه مذکور آن‌ها را می‌توان ساده نمود و تابع ساده شده را، فقط در دو جمله به‌صورت زیر بدست آورد:

$$F = C + A'B$$

۳-۳- نقشه چهار متغیره

نقشه برای تابع بول چهارمتغیره در شکل (۳-۸) نشان داده شده است. در شکل (الف) شانزده مینترم و مربع‌های نظیر آن‌ها نمایش داده شده‌اند. و در شکل (ب) نقشه مذکور با مقدار متغیرهای تخصیص داده شده به مینترم‌ها، نشان داده شده است. سطرها و ستون‌ها، با کُد انعکاسی (کد گری*) شماره‌گذاری شده‌اند، به طوری که در دو سطر، یا دو ستون مجاور، فقط یک بیت عوض می‌شود. مینترم نظیر هر مربع را، از پهلوی هم قرار دادن شماره سطر و شماره ستون آن، می‌توان بدست آورد. **به عنوان مثال** موقعی که شماره سومین سطر (11) و دومین ستون (01)، پهلوی هم قرار داده شوند، عدد باینری 1101 حاصل می‌شود، که معادل عدد دهدهی 13، نظیر مینترم m_{13} می‌باشد.

ساده کردن توابع بول چهار متغیره از طریق نقشه، شبیه روش ساده کردن توابع سه متغیره، با استفاده از مربع‌های همجوار است (قبلاً بحث شد). در این حالت نیز مربع‌های سمت راست، با چپ نقشه و همچنین مربع‌های بالا با پایین نقشه با هم همجوار محسوب می‌شوند، که برای ساده کردن تابع از آن‌ها می‌توان استفاده نمود. **به عنوان مثال** مینترم‌های m_0 و m_2 و همچنین m_3 و m_{11} همجوار می‌باشند. ترکیب مربع‌های همجوار که برای عملیات ساده کردن مفید می‌باشد، با بررسی نقشه چهار متغیره به طریق زیر به آسانی مشخص می‌شوند.

الف - یک مربع یک مینترم را نمایش می‌دهد که یک جمله چهارمتغیره است.

ب - دو مربع همجوار یک جمله سه متغیره را نشان می‌دهد.

ج - چهار مربع همجوار، یک جمله دو متغیره را نمایش می‌دهد.

د - هشت مربع همجوار یک جمله یک متغیره را نشان می‌دهد.

ه - شانزده مربع همجوار نمایش این است که تابع همواره برابر 1 می‌باشد.

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(الف)

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

(ب)

شکل (۳-۸)

نقشه چهارمتغیره

* - در فصل ۱ بحث شده است.

بدیهی است هیچ ترکیب دیگری از مربع‌ها را، برای ساده کردن تابع نمی‌توان استفاده نمود. **دو مثال زیر** روش ساده کردن توابع چهار متغیره را نشان می‌دهد.

مثال ۳-۵: تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

چون تابع چهار متغیر دارد، بنابراین نقشه چهار متغیره باید استفاده شود. برای مینترم‌هایی که به‌صورت مجموع در تابع نشان داده شده‌اند، مقدار 1 در نقشه شکل (۳-۹)، گذارده شده است. هشت مربع همجوار سمت چپ که مقدار آن‌ها 1 است را، با هم می‌توان ترکیب نمود و با یک متغیر y' نشان داد. سه 1 باقیمانده در طرف راست را، با هم نمی‌توان ترکیب کرد، چون تعداد مربع‌ها باید دو یا چهار مربع همجوار باشد. هر چه تعداد بیشتری مربع با هم ترکیب شوند، تعداد کمتری متغیر در جمله خواهیم داشت. **در این مثال** دو تا 1 بالایی سمت راست با دو تا 1 بالایی سمت چپ ترکیب می‌شوند که جمله $w'z'$ حاصل می‌گردد. توجه دارید که یک مربع را چندین بار می‌توان استفاده کرد. حال تنها یک مربع شامل 1 در سطر سوم و ستون چهارم باقیمانده است (مربع 1110). بجای این که مربع مذکور را به تنهایی در نظر بگیریم (که جمله با چهار متغیر می‌دهد) آن را به‌صورت چهار مربع همجوار، با مربع‌های همجوار که تا به حال استفاده شده ترکیب می‌نماییم. این مربع‌ها شامل دو سطر وسط و دو ستون دو انتها می‌باشند، که جمله xz' را می‌دهد. بنابراین تابع ساده شده به‌صورت زیر می‌شود.

$$F = y' + w'z' + xz'$$

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1	1		

شکل (۳-۹)

نقشه مثال ۳-۵: $F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14) = y' + w'z' + xz'$

مثال ۳-۶: تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C'$$

ناحیه‌ای از نقشه که در مربع‌ها 1 گذارده شده (شکل ۳-۱۰)، تابع را نشان می‌دهد. این تابع دارای چهار متغیر است و بوسیله سه جمله سه متغیره و یک جمله چهار متغیره بیان شده است. هر جمله سه متغیره در نقشه، با دو مربع نشان داده شده است. **به عنوان مثال** $A'B'C'$ در مربع‌های 0000 و 0001 مشخص شده است. تابع را با استفاده از نقشه می‌توان ساده نمود:

مثلاً ترکیب 1 های مربع‌های چهارگوشه جمله $B'D'$ را می‌دهد، چون وقتی نقشه را در سطحی فرض کنیم که لبه‌های چپ و راست و لبه‌های بالا و پایین آن به هم متصلند، این چهار مربع همجوار هستند. در طرف چپ، دو تا 1 در سطر بالا و دو تا 1 در سطر پایین نیز همجوار می‌باشند و جمله $B'C'$ بدست می‌آید. حاصل تنها 1 باقیمانده که با یک مربع همجوار (مستطیل سمت راست بالا) می‌تواند ترکیب شود جمله $A'CD'$ است. لذا تابع ساده شده عبارتست از:

$$F = B'D' + B'C' + A'CD'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01				1
11				
10	1	1		1

شکل (۳-۱۰)

نقشه مثال ۳-۶: $A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C' = B'D' + B'C' + A'CD'$

انتخاب‌های نخستین[1]:

هنگام انتخاب مربع‌های همجوار در نقشه، باید مطمئن شد که تمام مینترم‌های تابع، توسط ترکیب مربع‌های همجوار پوشش داده شوند. همچنین لازم است حداقل تعداد جمله‌ها، در عبارت تابع ساده شده موجود باشد و جملاتی که مینترم‌هایشان قبلاً توسط دیگر جملات پوشش داده شده‌اند گرفته نشوند.

1 - Prime Implicants

البته گاهی ممکن است دو یا چند عبارت ساده شده به طریق فوق حاصل شود. اگر مفهوم انتخاب نخستین و انتخاب نخستین اصلی[1] را درک نماییم، روش ترکیب مربع‌های نقشه را به‌صورت بهتری ممکن است انجام دهیم.

انتخاب نخستین، یک جمله حاصل‌ضرب است که با ترکیب حداکثر مربع‌های همجوار در نقشه حاصل می‌شود. اگر مینترمی نظیر یک مربع، بوسیله فقط یک انتخاب نخستین پوشش داده شود، انتخاب نخستین اصلی نامیده می‌شود.

همانطوری که قبلاً بحث شد، انتخاب نخستین با ترکیب حداکثر تعداد مربع‌های همجوار نقشه می‌تواند حاصل شود، که معنی آن، این است که یک 1 در نقشه اگر تنها باشد و همجوار هیچ 1 دیگر نباشد، خود یک انتخاب نخستین است. دو مربع همجوار 1، تشکیل یک انتخاب نخستین را می‌دهد، به شرطی که، جزء گروه چهار مربع همجوار نباشد. چهار مربع همجوار 1، تشکیل یک انتخاب نخستین را می‌دهد، به شرطی که جزء گروه هشت مربع همجوار نباشد و الی آخر. انتخاب نخستین اصلی با نظاره هر مربعی که دارای 1 است و بررسی اینکه مربع مذکور شامل چند انتخاب نخستین است، بدست می‌آید. به عبارت دیگر، یک انتخاب نخستین اصلی است، به شرطی که انتخاب نخستین مذکور تنها انتخابی باشد که مینترم را پوشش می‌دهد.

تابع چهار متغیره زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$$

مینترم‌های تابع بوسیله 1 ها در نقشه (۳-۱۱) مشخص شده‌اند. قسمت (الف) شکل (۳-۱۱) دو انتخاب نخستین اصلی را نشان می‌دهد، چون m_0 تنها در یک گروه مربع چهارتایی می‌تواند باشد، پس یک جمله انتخاب نخستین اصلی است که با $B'D'$ تعریف می‌شود. به‌طور مشابه تنها یک راه برای گرفتن مینترم m_5 با چهار مربع همجوار وجود دارد که دومین جمله انتخاب نخستین اصلی BD را می‌دهد. دو انتخاب نخستین اصلی مذکور هشت مینترم را پوشش می‌دهد. حال سه مینترم باقیمانده m_3، m_9 و m_{11} باید در نظر گرفته شوند.

شکل (ب -۳-۱۱) تمام راه‌های ممکنی را، که سه مینترم مذکور، بوسیله انتخاب‌های نخستین می‌توانند پوشش داده شوند، نشان می‌دهد. مینترم m_3 بوسیله انتخاب نخستین CD یا $B'C$ می‌تواند پوشش داده شود. مینترم m_9 نیز بوسیله انتخاب نخستین AD یا AB' می‌تواند پوشش داده شود. مینترم m_{11} بوسیله هر یک از چهار انتخاب قابل پوشش است.

عبارت ساده شده تابع بوسیله جمع منطقی دو انتخاب نخستین اصلی و هر یک از انتخاب‌های نخستین که مینترم‌های m_3، m_9 و m_{11} را بپوشاند حاصل می‌شود. تابع مذکور با چهار جمله حاصل‌ضرب دو متغیره در چهار فرم ذیل می‌تواند بیان شود:

1 - Essential Prime Implicant

$$F = BD + B'D' + CD + AD$$
$$= BD + B'D' + CD + AB'$$
$$= BD + B'D' + B'C + AD$$
$$= BD + B'D' + B'C + AB'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

الف: انتخاب‌های نخستین اصلی BD و $B'D'$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01		1	1	
11		1	1	
10	1	1	1	1

ب: انتخاب‌های نخستین $B'C$، CD، AB' و AD

شکل (۳-۱۱)
ساده کردن با به‌کار بردن انتخاب‌های نخستین اصلی

مثال فوق نشان می‌دهد که با مشخص نمودن انتخاب‌های نخستین در نقشه، عبارت‌های ساده شده مختلفی برای یک تابع بول می‌توان بدست آورد.

برای پیدا نمودن عبارت ساده شده تابع از نقشه، باید تمام انتخاب‌های نخستین اصلی گرفته شده و به آن‌ها، انتخاب‌های نخستین دیگر، که شامل بقیه مینترم‌هایی هستند، که در انتخاب‌های نخستین اصلی وجود ندارند اضافه شود. درنتیجه گاهی ممکن است بیش از یک راه برای ترکیب مربع‌ها وجود داشته باشد، که هر ترکیب خود تولید عبارت ساده شده‌ای نماید.

۳-۴- نقشه پنج متغیره

به‌کار بردن نقشه برای بیش از چهار متغیر، کمی مشکل است. **به عنوان مثال** نقشه پنج متغیره به ۳۲ مربع نیاز دارد و نقشه شش متغیره ۶۴ مربع لازم دارد. موقعی که تعداد متغیرها زیاد شود، تعداد مربع‌ها نیز سریعاً افزایش می‌یابد و فرم هندسی ترکیب مربع‌ها هم، پیچیده‌تر می‌گردد.

نقشه پنج متغیره از دو نقشه چهار متغیره با متغیرهای A و B و C و D و E تشکیل شده است (شکل ۳-۱۲). متغیر A که بالای نقشه نوشته شده برای تفکیک دو نقشه مذکور می‌باشد. نقشه چهار متغیره سمت چپ، نمایش ۱۶ مربع برای $A = 0$ و نقشه دیگر، مربع‌هایی که در آن‌ها $A = 1$ است را دربر دارد.

$A = 0$

BC \ DE	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$A = 1$

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	21	23	22
11	28	29	31	30
10	24	25	27	26

شکل (۳-۱۲)
نقشه پنج متغیره

مینترم‌های 0 تا 15 مربوط به $A = 0$ و مینترم‌های 16 تا 31 متعلق به $A = 1$ است. همانطوری که قبلاً بحث شد، هر نقشه چهار متغیره به‌طور مجزا، دارای مربع‌های همجوار می‌باشد. علاوه بر این هر مربع یا مینترم در نقشه $A = 0$ همجوار مربع یا مینترم نظیر نقشه $A = 1$ است. **به عنوان مثال** مینترم 4 همجوار مینترم 20 و مینترم 15 همجوار مینترم 31 می‌باشد. بهترین روش برای دیدن این قانون جدید، این است که دو نقشه یکی روی دیگری قرار گیرد، به این ترتیب مربع‌هایی که رویهم قرار می‌گیرند مربع‌های همجوار در دو نیم نقشه می‌باشند.

با روشی که در نقشه پنج متغیره به‌کار رفت، می‌توانیم نقشه شش متغیره‌ای با چهار نقشه چهارمتغیره درست کنیم که دارای ۶۴ مربع باشد. البته نقشه‌های شش متغیره یا بیشتر نیاز به مربع‌های زیاد دارند و غیرعملی می‌باشند. برای حل این مشکل برنامه‌های کامپیوتری ساده‌سازی توابع با تعداد زیاد متغیر استفاده می‌شود.

با توجه به مطالب فوق و در نظر گرفتن تعریف جدید مربع‌های همجوار، می‌توان نشان داد که هر 2^k مربع همجوار (برای $k = 0, 1, 2, \dots n$) از نقشه n متغیره، ناحیه‌ای از نقشه را، با یک جمله $n - k$ متغیری نمایش می‌دهد. بدیهی است $n > k$ می‌باشد و برای $n = k$ کل مربع‌ها با هم ترکیب می‌شوند و تابع برابر 1 می‌گردد (چون مثلاً $A + A' = 1$ است).

جدول (۳-۱) ارتباط بین تعداد مربع‌های همجوار و تعداد متغیرهای یک جمله را نشان می‌دهد. **به‌عنوان مثال** هشت مربع همجوار در نقشه پنج متغیره با هم ترکیب می‌شوند و یک جمله دو متغیری تولید می‌کنند.

جدول (۳-۱)

رابطه بین تعداد مربع‌های همجوار و تعداد متغیرها در یک جمله

k	تعداد مربع‌های همجوار 2^k	تعداد متغیرهای یک جمله در نقشه n متغیری $n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
0	1	2	3	4	5	6	7
1	2	1	2	3	4	5	6
2	4	0	1	2	3	4	5
3	8		0	1	2	3	4
4	16			0	1	2	3
5	32				0	1	2
6	64					0	1

مثال ۳-۷: تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(A, B, C, D, E) = (0, 2, 4, 6, 9, 13, 21, 23, 25, 29, 31)$$

نقشه پنج متغیره این تابع در شکل (۳-۱۳) نشان داده شده است. شش مینترم 0 تا 15 مربوط به

$A = 0$

BC \ DE	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11		1		
10		1		

$A = 1$

BC \ DE	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11		1	1	
10		1		

شکل (۳-۱۳)

نقشه مثال (۳-۷): $F = A'B'E' + BD'E + ACE$

نقشه $A = 0$ است و پنج مینترم دیگر متعلق به نقشه $A = 1$ می‌باشد. در نقشه $A = 0$، چهار مربع همجوار ترکیب می‌شوند و جمله سه متغیره $A'B'E'$ را تولید می‌کنند. توجه نمایید چون چهار مربع همجوار در ناحیه $A = 0$ است، پس جمله نظیر باید شامل A' باشد. دو مربع در ستون 01 و دو سطر آخر در دو نیم نقشه مشترک هستند، لذا آنها چهار مربع همجوار می‌باشند و جمله سه متغیری $BD'E$ را می‌سازند. در اینجا متغیر A وجود ندارد، زیرا مربع‌های همجوار مربوط به هر دو نیم نقشه

$A = 0$ و $A = 1$ هستند. جمله ACE نیز با ترکیب چهار مربع همجوار در نقشه $A = 1$ حاصل می‌شود. لذا تابع ساده شده به‌صورت مجموع منطقی سه جمله مذکور و به شکل زیر می‌باشد.

$$F = A'B'E' + BD'E + ACE$$

۳-۵-ساده نمودن تابع حاصل‌ضرب مجموع‌ها

در تمام **مثال‌های قبل**، توابع بول ساده شده از نقشه، به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها بودند، ولی با تغییر کوچکی، فُرم ساده شده تابع به شکل حاصل‌ضرب مجموع‌ها را نیز، می‌توان بدست آورد.

روش بدست آوردن تابع ساده شده به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها، با استفاده از خواص توابع بول می‌باشد. همانطور که می‌دانیم 1 های داخل مربع‌های نقشه، نمایش مینترم‌های تابع هستند، لذا مکمل تابع، با مربع‌هایی در نقشه که فاقد 1 هستند نشان داده می‌شود. اگر داخل مربع‌های خالی مقدار 0 قرار دهیم و مربع‌های همجوار آن‌ها را ترکیب کنیم، فُرم ساده شده مکمل تابع یعنی F' حاصل می‌شود. چون مکمل تابع F'، خود تابع F را تولید می‌کند، لذا با استفاده از تئوری دمورگان خود تابع به‌طور اتوماتیک، به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها بدست می‌آید. **مثال زیر** این موضوع را بهتر روشن می‌نماید.

مثال ۳-۸: تابع بول زیر را به شکل:

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10)$$

الف - مجموع حاصل‌ضرب‌ها

ب - حاصل‌ضرب مجموع‌ها

ساده نمایید.

1 هایی که در نقشه شکل (۳-۱۴) قرار داده شده‌اند نمایش مینترم‌های تابع هستند. و مربع‌هایی که در آن‌ها 0 قرار دارند مینترم‌هایی هستند که در تابع F وجود ندارند، و نمایش تابع مکمل F یعنی F' می‌باشند. با ترکیب مربع‌هایی که شامل 1 هستند فُرم ساده شده، مجموع حاصل‌ضرب‌ها به طریق زیر حاصل می‌شود.

الف:

$$F = B'D' + B'C' + A'C'D$$

اگر مربع‌های همجوار که شامل 0 هستند را در نقشه ترکیب کنیم، فُرم ساده شده مکمل تابع یعنی F' به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$F' = AB + CD + BD'$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	1	0	1

شکل (۳-۱۴)

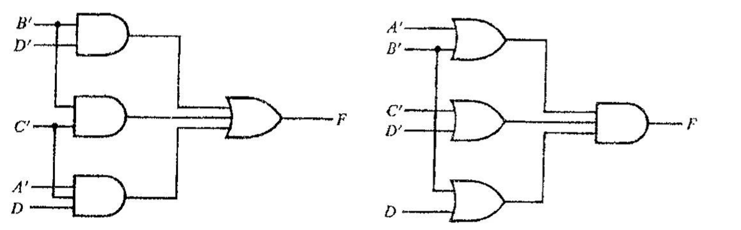
نقشه مثال (۳-۸): $F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10) =$

$B'D' + B'C' + A'C'D = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$

با به کار بردن تئوری دمورگان (با استفاده از دوگان و مکمل کردن هر متغیر، مطابق آنچه که در بخش ۲-۴ شرح داده شده است) فُرم ساده شده خود تابع به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها به‌صورت ذیل بدست می‌آید.

$$F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$$

پیاده‌سازی عبارت‌های ساده‌شده مثال (۳-۸) در شکل (۳-۱۵) نشان داده شده‌اند.



الف: $F = B'D' + B'C' + A'C'D$

ب: $F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$

شکل (۳-۱۵)

پیاده‌سازی تابع مثال (۳-۸) با گیت‌ها

در شکل (الف) عبارت مجموع حاصل‌ضرب‌ها با یک گروه گیت AND و هر گیت AND برای یک جمله پیاده‌سازی شده است. خروجی گیت‌های AND به ورودی یک گیت OR متصل گردیده است. همچنین تابع در شکل (ب) به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها با یک گروه گیت‌های OR و هر گیت OR برای یک جمله می‌باشد، پیاده‌سازی شده است. خروجی گیت‌های OR به ورودی‌های یک گیت AND متصل شده است.

در هر حالت فرض بر این است که هر متغیر و مکمل آن مستقیماً وجود دارد، بنابراین به معکوس‌کننده نیازی نیست. شکل (۳-۱۵) یک روش کلی برای پیاده‌سازی دو فُرم استاندارد تابع بول است.

موقعی که تابع به‌صورت مجموع حاصل‌ضرب‌ها است خروجی گیت‌های AND، به ورودی‌های یک گیت

OR متصل شده است و در حالتی که تابع به شکل حاصل‌ضرب مجموع‌ها است، خروجی گیت‌های OR، به ورودی‌های یک گیت AND متصل می‌شود. هر دو ساختار تابع دارای دو طبقه گیت[1] هستند. لذا پیاده‌سازی تابع به شکل استاندارد دو طبقه[2] می‌باشد.

مثال (۳-۸) روش بدست آوردن فُرم ساده شده تابع، موقعی که تابع در اصل به‌صورت فُرم کانونیک مجموع حاصل‌ضرب‌ها بیان شده است را نشان می‌دهد. این روش را می‌توان برای حالتی که تابع در اصل، به شکل حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها بیان شده باشد نیز به کار برد. **به عنوان مثال** جدول درستی (۳-۲) برای تابع F را در نظر می‌گیریم، تابع به‌صورت مجموع مینترم‌ها به شکل زیر:

$$F(x, y, z) = \Sigma(1, 3, 4, 6)$$

است و به‌صورت حاصل‌ضرب ماکسترم‌ها به فُرم ذیل:

$$F(x, y, z) = \Pi(0, 2, 5, 7)$$

بیان می‌شود.

جدول (۳-۲)

جدول درستی تابع F

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

به عبارت دیگر، 1 های تابع، نمایش مینترم و 0ها نشان‌دهنده ماکسترم می‌باشند. نقشه این تابع در شکل (۳-۱۶) نشان داده شده است.

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

شکل (۳-۱۶)

نقشه تابع جدول (۳-۲)

1 - Two Level of Gates
2 - Two-level Implementation

جهت ساده کردن تابع، برای هر مینترمی که تابع به ازاء آن 1 است، در نقشه در مربع‌های نظیر، 1 قرار داده می‌شود و در بقیه مربع‌ها 0 قرار می‌گیرد.

از طرف دیگر اگر حاصل‌ضرب ماکسترم در ابتدا داده شده باشد، می‌توان در آن مربع‌هایی که تابع مشخص می‌کند، 0 قرار داد و بقیه مربع‌ها را با 1 پُر کرد. بعد از این که 1 ها و 0 ها در مربع‌ها قرار گرفتند، تابع به‌صورت هر یک از دو فُرم استاندارد می‌تواند ساده شود. برای مجموع حاصل‌ضرب‌ها، 1 ها را ترکیب می‌کنیم که عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$F = x'z + xz'$$

جهت حاصل‌ضرب مجموع‌ها، 0 ها را ترکیب می‌نماییم که مکمل تابع یعنی F' به‌صورت ساده شده به شکل زیر حاصل می‌گردد.

$$F' = xz + x'z'$$

از عبارات فوق نتیجه می‌شود که تابع EOR مکمل تابع هم‌ارزی است (بخش ۲-۶). با مکمل کردن تابع F'، خود تابع ساده شده به شکل حاصل‌ضرب مجموع‌ها بدست می‌آید.

$$F = (x' + z')(x + z)$$

برای وارد کردن یک تابع در نقشه که به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها بیان شده است، ابتدا مکمل تابع را می‌گیریم و در نقشه در مربع‌های نظیر 0 قرار می‌دهیم. لذا بقیه مربع‌های تابع، دارای مقدار 1 خواهند بود که از آن می‌توان شکل ساده تابع را بدست آورد. **به عنوان مثال** تابع:

$$F = (A' + B' + C')(B + D)$$

را در نظر می‌گیریم. ابتدا مکمل تابع یعنی F' را بدست می‌آوریم:

$$F' = ABC + B'D'$$

و سپس در نقشه برای مینترم‌های تابع F' مقدار 0 قرار می‌دهیم. لذا بقیه مربع‌های نقشه مقدار 1 را خواهند داشت، که می‌توان از آن فُرم ساده شده تابع را به شکل مجموع حاصل‌ضرب‌ها بدست آورد.

۳-۸- شرایط بی‌اهمیت

جمع منطقی مینترم‌های تابع بول، مشخص‌کننده شرایطی است که، تابع به ازاء آن‌ها مقدار 1 را دارد و برای بقیه مینترم‌ها تابع برابر 0 می‌باشد. این موضوع برای شرایطی است که تمام ترکیبات متغیرهای ورودی قابل قبول باشد. در برخی کاربردها مقدار تابع، برای بعضی ترکیب‌های متغیرها مشخص نشده‌اند. **به عنوان مثال** در کُد چهار بیتی دودویی، شش ترکیب بالای 10 آن به کار نمی‌رود و مشخص نشده است. در مواقعی که برای تعدادی از ترکیب‌های متغیرهای ورودی، تابع خروجی تعریف نشده‌اند تابع ناقص (یا کاملاً مشخص نشده)[1] نامیده می‌شود.

در کاربردهایی که برخی مینترم‌ها مشخص نشده‌اند، برای ما اهمیتی ندارد که تابع به ازاء آن‌ها چه مقدار داشته باشد. به این دلیل معمولاً مینترم‌های تابع که مشخص نشده‌اند را شرایط یا مینترم‌های بی‌اهمیت نامند. این شرایط بی‌اهمیت را در نقشه، برای ساده‌تر کردن بیشتر عبارت تابع، می‌توان استفاده نمود. برای مشخص نمودن مینترم‌های بی‌اهمیت، بجای قرار دادن 0 یا 1، مقدار × در نقشه قرار داده می‌شود. لذا قرار دادن علامت × داخل مربع‌های نقشه، نشان‌دهنده مقدار بی‌اهمیت مینترم برای تابع است، یعنی برای ما اهمیتی ندارد که تابع F برای این مینترم بخصوص 0 یا 1 باشد.

موقعی که مربع‌های همجوار را برای ساده‌سازی تابع در نقشه انتخاب می‌کنیم، مینترم‌های بی‌اهمیت یا علامت × را 0 یا 1 می‌توان فرض نمود. و در زمانی که تابع را ساده می‌نماییم بستگی به اینکه کدام ترکیب ساده‌ترین عبارت تابع را تولید می‌کند، مقدار این مینترم‌ها یا × ها 1 یا 0 می‌تواند انتخاب شود، **مثال زیر** این موضوع را روشن می‌نماید.

1 - Incompletly Specified Function

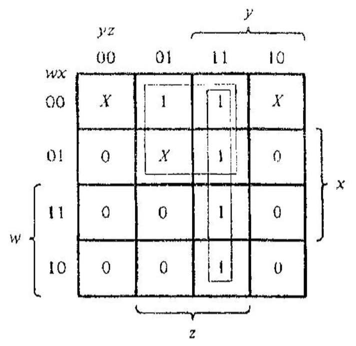
مثال ۳-۱۲: تابع بول زیر را ساده کنید.

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(1, 3, 7, 11, 15)$$

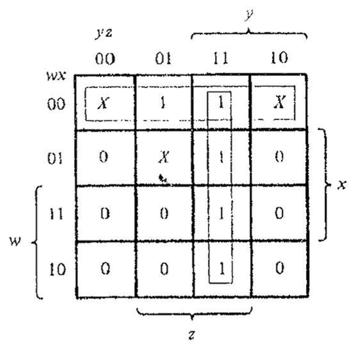
تابع به ازاء مینترم‌های فوق برابر 1 است. و برای مینترم‌های d زیر بی‌اهمیت، یعنی 0 یا 1 می‌تواند باشد.

$$d(w, x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5)$$

ساده‌سازی تابع در نقشه شکل (۳-۲۶) نشان داده شده است.



ب: $F = yz + w'z$



الف: $F = yz + w'x'$

شکل (۳-۲۶)
مثالی با شرایط بی‌اهمیت

مینترم‌های تابع F با 1 و مینترم‌های بی‌اهمیت d با × در نقشه شکل مذکور مشخص شده‌اند و بقیه مینترم‌ها یا مربع‌ها با 0 پُر شده‌اند. برای بدست آوردن ساده‌ترین عبارت مجموع حاصل‌ضرب‌ها، باید پنج عدد 1 نقشه در نظر گرفته شوند، ولی بستگی به راهی که تابع ممکن است ساده شود، از × ها نیز می‌توانیم استفاده کنیم. جمله yz چهار مینترم ستون سوم را می‌پوشاند. مینترم باقیمانده m_1 می‌تواند با مینترم m_3 ترکیب شود و جمله سه متغیری $w'x'z$ را بدهد. ولی با در نظر گرفتن دو × همجوار می‌توان چهار مربع همجوار را با هم ترکیب نمود تا یک جمله دو متغیری حاصل گردد. در شکل (۳-۲۶- الف) مینترم‌های بی‌اهمیت 0 و 2 با 1 ها ترکیب شده‌اند که نتیجه تابع ساده شده به‌صورت زیر می‌گردد.

$$F = yz + w'x'$$

در شکل (۳-۲۶-ب) مینترم بی‌اهمیت 5 با 1 ها ترکیب شده و عبارت ساده شده تابع به‌صورت زیر شده است.

$$F = yz + w'z$$

هر یک از عبارات بالا خواسته‌های این مثال را برآورده می‌سازد و قابل قبول هستند.

در مثال فوق نشان داده شد که مینترم‌های بی‌اهمیت در نقشه ابتدا با علامت × مشخص می‌شوند، که

بعداً می‌توانند 0 یا 1 در نظر گرفته شوند. انتخاب بین 0 یا 1 ، برای مینترم‌های بی‌اهمیت بستگی به این دارد که تابع مذکور چطور ساده شود.

تابع ساده شده‌ای که به این ترتیب حاصل می‌شود شامل مینترم‌های نظیر 1 و مینترم‌هایی است که در ابتدا بی‌اهمیت بودند ولی بعداً با 1 جایگزین شدند که تابع ساده شود. دو عبارت ساده شده فوق را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$F(w, x, y, z) = yz + w'x' = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 11, 15)$$
$$F(w, x, y, z) = yz + w'z = \Sigma(1, 3, 5, 7, 11, 15)$$

هر دو عبارت شامل مینترم‌های 1 و 3 و 7 و 11 و 15 می‌باشند که تابع F به ازاء آن‌ها برابر 1 است. مینترم‌های بی‌اهمیت 0 و 2 و 5 در هر عبارت به‌طور متفاوتی در نظر گرفته شده‌اند. در اولین عبارت برای مینترم‌های بی‌اهمیت 0 و 2 مقدار 1 و جهت مینترم 5 مقدار 0 در نظر گرفته شده است. در عبارت دوّم برای مینترم بی‌اهمیت 5 مقدار 1 و جهت مینترم‌های 0 و 2 مقدار 0 در نظر گرفته شده است.

دو عبارت مذکور از نظر جبری متفاوت هستند و هر دو شامل مینترم‌هایی هستند که تابع به ازاء آن‌ها برابر 1 است، ولی شامل مینترم‌های بی‌اهمیت متفاوت می‌باشند. هر دو عبارت ساده شده برای تابع F قابل قبول هستند، چون اختلاف آن‌ها، برای مینترم‌های بی‌اهمیت است.

عبارت ساده شده تابع را به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها نیز، از شکل (۳-۲۶) می‌توان بدست آورد. برای این کار کافیست 0های نقشه را با مینترم‌های 0 و 2 که در این حالت مقدار 0 را خواهند داشت ترکیب کنیم، در این صورت تابع F' به شکل زیر می‌شود.

$$F' = z' + wy'$$

با گرفتن مکمل F' عبارت ساده شده خود تابع F به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع‌ها مطابق زیر حاصل می‌شود.

$$F(w, x, y, z) = z(w' + y) = \Sigma(1, 3, 5, 7, 11, 15)$$

در این حالت، مینترم‌های بی‌اهمیت 0 و 2 مقدار 0 و مینترم 5 مقدار 1 را دارا می‌باشد.

۴

مدارهای منطقی ترکیبی[1]

هدف: آشنایی با مدارهای ترکیبی، روش طراحی و تجزیه و تحلیل آن‌ها، کاربرد این مدارها در طراحی جمع‌کننده، تفریق‌گرها و مبدل‌های کُد، کاربرد مدارهای NAND، NOR و OR، NOR انحصاری در طراحی این مدارها...

چشم‌انداز این فصل

۱ - مقدمه
۲ - روش طراحی مدارهای ترکیبی
۳ - جمع‌کننده‌ها
۴ - تفریق‌گرها
۵ - تبدیل کُدها
۶ - روش تحلیل مدارهای ترکیبی
۷ - مدارهای NAND چندطبقه[2]
۸ - مدارهای NOR چندطبقه
۹ - تابع OR انحصاری (XOR یا EOR)
۱۰ - منابع
۱۱ - تمرین

1 - Combinational Logic   2 - Multilevel NAND Circuits